Fiche outil – Produit vectoriel

Définition

Opération qui associe à deux vecteurs un troisième vecteur et est notée : $\overrightarrow{\boldsymbol{W}} = \overrightarrow{\boldsymbol{V_1}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{V_2}}$

Le produit vectoriel de deux vecteurs est un vecteur

Approche analytique

Soient deux vecteurs exprimés dans une même base, $\vec{V_1} = x_1.\vec{x} + y_1.\vec{y} + z_1.\vec{z}$ et $\vec{V_2} = x_2.\vec{x} + y_2.\vec{y} + z_2.\vec{z}$, alors :

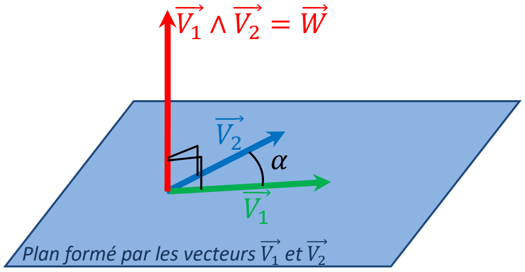
$$\vec{W} = \vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1.z_2 - z_1 y_2 \\ z_1.x_2 - x_1.z_2 \\ x_1.y_2 - y_1 x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{vmatrix}$$

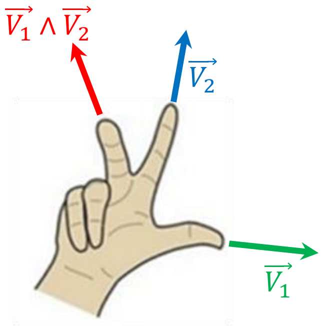
Il faut réécrire la première ligne pour ne pas faire d'erreur de signe → $x_1 \quad x_2$

Approche géométrique

$\overrightarrow{\boldsymbol{W}} = \overrightarrow{\boldsymbol{V_1}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{V_2}}$ avec $\overrightarrow{\boldsymbol{W}}$ tel que :

- $\vec{W}$ est **perpendiculaire au plan formé par $\overrightarrow{\boldsymbol{V_1}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{V_2}}$**
- $(\vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{W})$ forment un **trièdre direct**
- $\|\overrightarrow{\boldsymbol{W}}\| = \|\overrightarrow{\boldsymbol{V_1}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{V_2}}\| = \boldsymbol{V_1.V_2.sin\alpha}$ avec $\boldsymbol{\alpha}$ angle entre les vecteurs $(\overrightarrow{\boldsymbol{V_1}}, \overrightarrow{\boldsymbol{V_2}})$





Propriétés

- Le produit vectoriel est anticommutatif : $\overrightarrow{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{1}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{2}} = -(\overrightarrow{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{2}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{1}})$
- Associativité par rapport à la multiplication par un scalaire : $\boldsymbol{\lambda}.(\overrightarrow{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{1}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{2}}) = \boldsymbol{\lambda}.\overrightarrow{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{1}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{2}} = \overrightarrow{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{1}} \wedge \boldsymbol{\lambda}.\overrightarrow{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{2}}$
- Distributivité : $\overrightarrow{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{1}} \wedge (\overrightarrow{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{2}} + \overrightarrow{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{3}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{1}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{2}} + \overrightarrow{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{1}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{3}}$
- Cas particulier
  - Si : $\alpha = \frac{\pi}{2}$ alors $\vec{V_1} \wedge \vec{V}_2 = \vec{V}_3$ avec $\vec{V_3} \perp \vec{V}_1$ et $\vec{V_3} \perp \vec{V}_2$
  - Si : $\theta = 0$ alors $\vec{V_1} \wedge \vec{V}_2 = \vec{0}$