SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGENIEUR

DC7: Analyser et résoudre les problèmes d'équilibre dans les mécanismes

Principe Fondamental de la Statique (PFS)

Objectifs	• Déterminer les efforts dans les mécanismes à l'équilibre ou à vitesse constante

Savoirs
Je connais:

- Action mécanique
- Principe fondamental de la statique (2D/3D)
  - Théorème de la résultante statique
  - Théorème du moment statique

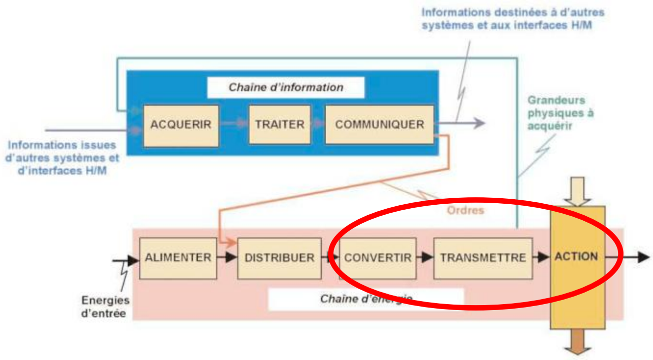
Savoir Faire
Je sais faire:

- Mettre en œuvre une démarche en vue de déterminer les inconnues de liaison.
- Déterminer les paramètres conduisant à des positions d'équilibre.
- Déterminer les inconnues de liaison ou les efforts extérieurs spécifiés dans le cas ou le mouvement est imposé.

Sommaire

Le but de ce chapitre est en particulier la détermination des ***torseurs d'action mécanique*** s'exerçant sur un ensemble matériel (S), lorsque (S) est en équilibre par rapport à un repère Galiléen. Pour cela, il est nécessaire de formuler le ***principe fondamental de la statique*** après avoir défini la ***notion d'équilibre d'un ensemble matériel*** par rapport à un repère.

La détermination des Actions Mécaniques permet par la suite de ***dimensionner*** *les différents éléments, pièces d'un système.*



I. EQUILIBRE D'UN ENSEMBLE MATERIEL PAR RAPPORT À UN REPERE

Un système matériel (S) est en équilibre, c'est-à-dire immobile par rapport à un repère (R) si, et seulement si les coordonnées de tous points de(S) sont invariants au cours du temps.

Deux types de problèmes peuvent alors se présenter :

- Un système étant au repos, **déterminer les actions mécaniques** pour qu'il reste en équilibre.
- Un système étant soumis à des actions mécaniques données, dans **quelle(s) position(s) sera-t-il en équilibre** ? **Quelle est la stabilité de l'équilibre** ?

II. PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA STATIQUE

II.1. Actions mécaniques extérieures à un système matériel

II.1.1. Frontière d'isolement

Soit (S) un système matériel quelconque. On appelle l'***extérieur*** du système matériel (S), le milieu extérieur au solide, c'est-à-dire tout ce qui se trouve à **l'extérieur de la frontière d'isolement**.

On le note $(\overline{S})$.

II.1.2. Actions mécaniques (AM) extérieures à (S)

Ce sont les A.M. exercées par $\overline{S}$ sur S. Ces actions sont modélisables par un torseur qui s'exprime toujours en un point P (quelconque) donné noté :

$$\{T(\overline{S} \to S)\} = \{T(\overline{S} \to S)\} = {}_P\begin{Bmatrix} \vec{R}(\overline{S} \to S) \\ \overrightarrow{M_P}(\overline{S} \to S) \end{Bmatrix}_R = {}_P\begin{Bmatrix} X & L_P \\ Y & M_P \\ Z & N_P \end{Bmatrix}_R$$

Remarque : *pour déterminer ce torseur, il faut souvent le décomposer en plusieurs torseurs, puis procéder à une somme des A.M. de chaque élément de* $\overline{S}$ *sur S.*

Soient S, S_1 et S_2 trois systèmes matériels quelconques avec $\overline{S} = S_1 + S_2$.

$$\{T(\overline{S} \to S)\} = \{T(S_1 \to S)\} + \{T(S_2 \to S)\}$$

Pour additionner deux torseurs, il faut les écrire en un même point.

II.2. Enoncé du Principe Fondamental de la Statique (PFS)

Il existe au moins un repère de l'espace, appelé repère Galiléen, tel que le torseur des actions mécaniques exercées sur un système matériel (S) en équilibre dans ce repère soit nul.

$$\boxed{\left\{T(\bar{S} \rightarrow S)\right\} = \left\{0\right\}}$$

Repère Galiléen
Pour la plupart des mécanismes étudiés en laboratoire, un repère lié à la terre constitue une très bonne approximation d'un repère Galiléen.

II.2.1. Théorèmes généraux de la statique – Expression vectorielle du PFS

En écrivant qu'en tout point (P) de l'espace, la résultante générale et le moment résultant des actions mécaniques extérieures au système matériel (S) sont nuls, on obtient deux théorèmes appelés **théorèmes généraux de la statique** :

Posons $\left\{T(\bar{S} \rightarrow S)\right\} = {}_P\begin{Bmatrix} \vec{R}_{(\bar{S}\rightarrow S)} \\ \overrightarrow{M}_{P\,(\bar{S}\rightarrow S)} \end{Bmatrix}$ en un point P quelconque.

Théorème de la résultante : $\boxed{\vec{R}_{(\bar{S}\rightarrow S)} = \vec{0}}$

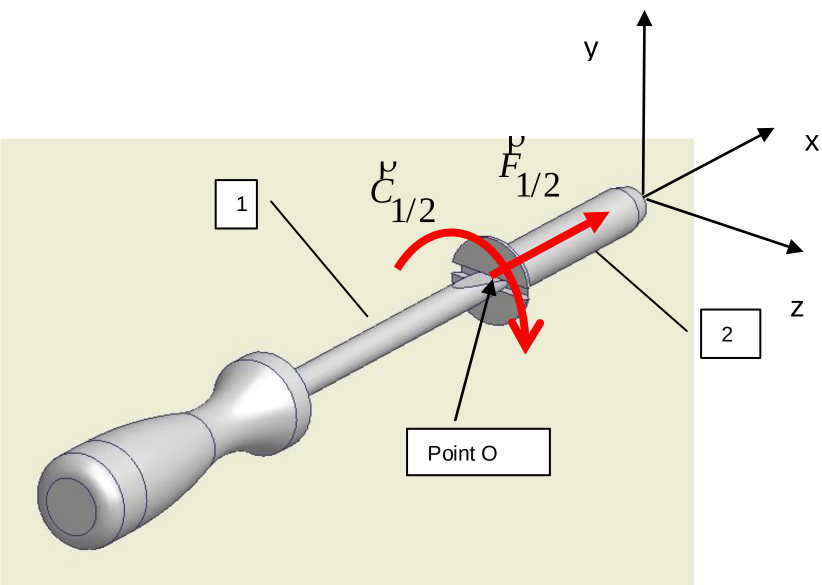
Théorème du moment résultant : $\boxed{\overrightarrow{M}_{P\,(\bar{S}\rightarrow S)} = \vec{0}}$

II.2.2. Expression scalaire du PFS

On peut écrire $\left\{T(\bar{S} \rightarrow S)\right\} = {}_P\begin{Bmatrix} \vec{R}_{(\bar{S}\rightarrow S)} \\ \overrightarrow{M}_{P\,(\bar{S}\rightarrow S)} \end{Bmatrix}$. L'application du PFS nous permet d'écrire **6 équations scalaires** et ainsi de résoudre analytiquement le problème/

$$\left\{T(\bar{S} \rightarrow S)\right\} = {}_P\begin{Bmatrix} \vec{R}_{(\bar{S}\rightarrow S)} \\ \overrightarrow{M}_{P(\bar{S}\rightarrow S)} \end{Bmatrix} = {}_P\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \text{ d'où : } \begin{cases} \overrightarrow{R_{\bar{S}\rightarrow S}}.\vec{x} = 0 \\ \overrightarrow{R_{\bar{S}\rightarrow S}}.\vec{y} = 0 \\ \overrightarrow{R_{\bar{S}\rightarrow S}}.\vec{z} = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \overrightarrow{M}_{P,\bar{S}\rightarrow S}.\vec{x} = 0 \\ \overrightarrow{M}_{P,\bar{S}\rightarrow S}.\vec{y} = 0 \\ \overrightarrow{M}_{P,\bar{S}\rightarrow S}.\vec{z} = 0 \end{cases}$$

II.3. Principe des actions mutuelles



L'action mécanique du système matériel (S_1) sur le système matériel (S_2) est directement opposée à l'action mécanique du système matériel (S_2) sur le système matériel (S_1).

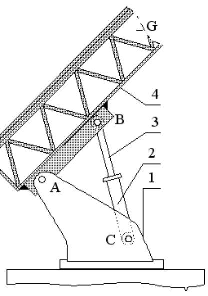
$$\boxed{\left\{T(S_1 \rightarrow S_2)\right\} = -\left\{T(S_2 \rightarrow S_1)\right\}}$$

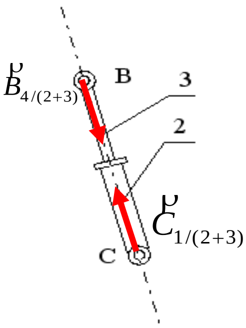
$${}_O\begin{Bmatrix} \vec{F}_{1\rightarrow 2} \\ \vec{C}_{1\rightarrow 2} \end{Bmatrix} = -{}_O\begin{Bmatrix} \vec{F}_{2\rightarrow 1} \\ \vec{C}_{2\rightarrow 1} \end{Bmatrix}$$

II.4. Cas particulier d'un ensemble soumis à deux glisseurs

Si un système matériel est en équilibre sous l'action de deux glisseurs alors ces deux glisseurs sont opposés :

- Direction : la droite passant par les deux points d'application
- Sens : opposés
- Intensités : égales

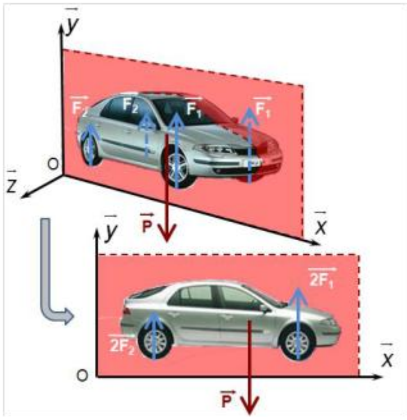




$$\vec{B}_{4\rightarrow(2+3)} = -\vec{C}_{1\rightarrow(2+3)}$$

III. PROBLEME PLAN

III.1. Définition



Source de l'image
SII- Pôle Chateaubriand
Jolio-Curie

On peut admettre qu'un mécanisme est « plan » si :

- La géométrie des liaisons d'un mécanisme présente un plan de symétrie
- Les AM extérieurs exercées sur ce système sont symétriques par rapport à ce plan, c'est-à-dire que :
  - Les résultantes des AM extérieures sont parallèles au plan de symétrie
  - Les moments des AM extérieures sont perpendiculaires au plan de symétrie.

III.2. Résolution analytique

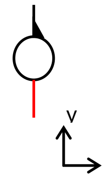
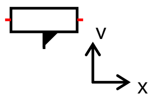
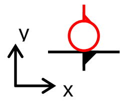
Le PFS appliqué à un système matériel « plan » (dans le plan $(\vec{x}, \vec{y})$) ne fournira qu'un maximum de **3 équations** :

Théorème de la résultante statique : 1 équation en projection sur l'axe des $\vec{x}$

1 équation en projection sur l'axe des $\vec{y}$

Théorème du moment statique : 1 équation en projection sur l'axe des $\vec{z}$

Remarque : Les seuls modèles de liaisons que l'on trouvera avec l'hypothèse d'un problème plan (dans le plan $(\vec{x},\vec{y})$) :

Liaison	**Schématisation plane**	**Torseur statique associé (liaison parfaite sans frottement)**
<u>Pivot - "Articulation"</u> D'axe $(O,\vec{z})$		$\{T_{S_2\to S_1}\}_A = {}_A\left\{\begin{matrix} X_{2\to1} & - \\ Y_{2\to1} & - \\ - & 0 \end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$ La forme du torseur reste identique en tout point A de l'axe $(O,\vec{z})$, mais attention les valeurs de composantes ne sont pas forcément égales.
<u>Glissière</u> De direction $\vec{x}$		$\{T_{S_2\to S_1}\}_A = {}_A\left\{\begin{matrix} 0 & - \\ Y_{2\to1} & - \\ - & N_{A,2\to1} \end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$ La forme du torseur reste identique en tout point A de l'espace, mais attention les valeurs de composantes ne sont pas forcément égales
<u>Sphère-plan (ponctuelle) - "appui"</u> De point de contact O De normale $\vec{y}$		$\{T_{S_2\to S_1}\}_A = {}_A\left\{\begin{matrix} 0 & - \\ Y_{2\to1} & - \\ - & 0 \end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

III.3. Résolution graphique

Hypothèses :

Pour pouvoir appliquer la méthode de résolution graphique :

- Il faut un **problème plan** (symétrie géométrique ainsi que symétrie au niveau des AM)
- Le système matériel isolé ne doit pas être soumis à plus de 3 **actions mécaniques de support non parallèles** modélisable par des glisseurs (forces).

Bilan des actions mécaniques

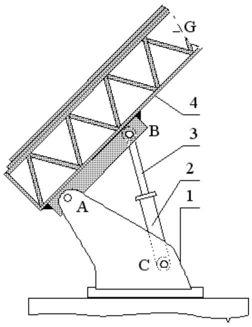
Chaque glisseur est défini par la connaissance de trois caractéristiques : son point d'application, sa direction et son intensité.
L'équilibre d'un système matériel se traduit par trois équations scalaires et ne permet donc de déterminer que 3 caractéristiques inconnues au plus.

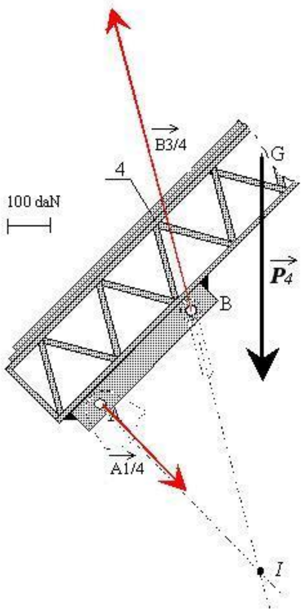
On présente souvent le bilan des actions mécaniques sous la forme d'un tableau :

Bilan des actions mécaniques exercées sur le système matériel (S)				
Nom de l'action	*Point d'application*	*Direction*	*Sens*	*Intensité*

Traduction graphique du théorème du moment résultant en I

Les trois supports (directions) des glisseurs se coupent en un même point I.

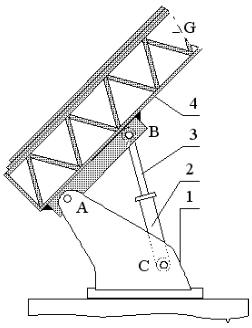


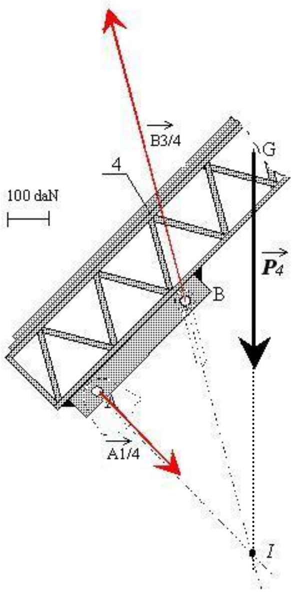


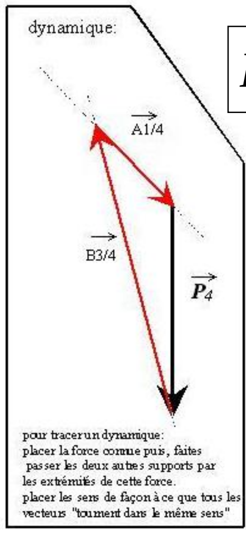
$$M_I(\vec{B}_{3\to4}) + M_I(\vec{A}_{1\to4}) + M_I(\vec{P}_4) = \vec{0}$$

Traduction grahique du théorème de la résultante

La somme des trois résultantes des glisseurs est nulle. Ces trois glisseurs forment une figure appelée dynamique fermé.







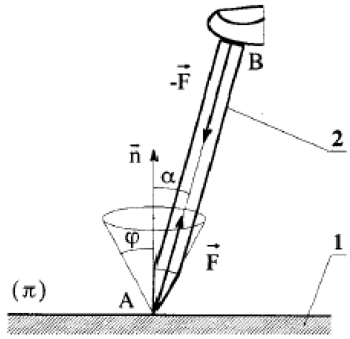
$$\vec{B}_{3\to4} + \vec{A}_{1\to4} + \vec{P}_4 = \vec{0}$$

IV. NOTION D'ARC BOUTEMENT

Deux solides en contact sont dits arc-boutés l'un sur l'autre, sous l'effet d'actions mécaniques, si les deux solides restent immobiles l'un par rapport à l'autre, quelle que soit l'intensité de ces actions mécaniques.

Exemple d'un crayon sur une table

Un crayon 2 est appuyé contre le plan (π) d'une table 1 par le doigt d'une main. Si on néglige son poids, le crayon est en équilibre sous l'action de deux glisseurs opposés de droite d'action (AB).
Si l'inclinaison α de l'axe du crayon reste inférieure à l'angle d'adhérence limite φ, entre la mine et la table, alors la mine du crayon ne glissera pas sur la table, quelle que soit l'intensité F de l'action exercée par le doigt.



Exemple d'une échelle contre un mur

Une échelle 2, de centre de gravité G et de poids P, repose sur le sol 1 au point A et appuie contre le mur 3 au point B.
On suppose le contact en B sans frottement et en A avec frottement.
L'échelle est en équilibre sous l'action de trois glisseurs.

- en A : glisseur inconnu $\vec{R}(1 \to 2)$,
- en B : glisseur de droite d'action normale au plan tangent $\vec{R}(3 \to 2)$,
- en G : poids connu $\vec{P}$.

$\vec{R}(3 \to 2)$ et $\vec{P}$ étant concourants au point I,
$\vec{R}(1 \to 2)$ a pour droite d'action (AI). Si l'inclinaison α de ce glisseur par rapport à la verticale reste inférieure à l'angle d'adhérence limite φ, l'échelle reste en équilibre quelque soit son poids.