



Paramétrer et caractériser le mouvement d'un solide

Objectifs

- Proposer et analyser le paramétrage d'un mécanisme
- Utiliser les démarches et méthodes permettant de déterminer les caractéristiques du mouvement des points d'un solide (trajectoire, vitesse, accélération)

Savoirs

Je connais:

- Loi de mouvement
- Outils mathématiques associés :
 - Vecteurs et systèmes de coordonnées
 - Projection d'un vecteur et produit scalaire
 - Produit vectoriel

Savoir Faire

Je sais faire:

- Paramétrer le mouvement d'un solide indéformable
- Réaliser les figures de changement de base associées au paramétrage
- Exprimer les coordonnées d'un vecteur
- Déterminer la trajectoire d'un point d'un solide par rapport à un autre solide
- Déterminer le vecteur vitesse d'un point d'un solide par rapport à un autre solide
- Déterminer le vecteur accélération d'un point d'un solide par rapport à un autre solide

Sommaire

I. PARAMETRAGE DU MOUVEMENT D'UN SOLIDE.....	3
I.1. REFERENTIEL.....	3
I.1.1. <i>Notion de mouvement / Référence spatiale</i>	3
I.1.2. <i>Notion de temps</i>	3
I.1.3. <i>Système de référence / référentiel</i>	3
I.1.4. <i>Solide indéformable</i>	3
I.1.5. <i>Référentiel et solide indéformable</i>	3
I.2. MOUVEMENT RELATIF ENTRE DEUX SOLIDES.....	4
I.2.1. <i>Paramétrage de la position d'un solide par rapport à un repère</i>	4
I.2.2. <i>Paramétrage de la position de l'origine</i>	4
I.2.3. <i>Paramétrage de l'orientation d'une base</i>	6
I.2.4. <i>Changement de base d'un vecteur dans le cas d'une rotation autour d'un axe</i>	6
I.2.5. <i>Paramétrage d'un mécanisme</i>	7
II. CINEMATIQUE DU POINT	7
II.1. POINT MATERIEL.....	7
II.2. VECTEUR POSITION.....	7
II.1. VECTEUR DEPLACEMENT.....	8
II.2. TRAJECTOIRE.....	8
II.3. VECTEUR VITESSE INSTANTANEE.....	8
II.4. VECTEUR ACCELERATION INSTANTANEE.....	9
II.5. DERIVATION TEMPORELLE D'UN VECTEUR PAR RAPPORT A UN REFERENTIEL.....	9
II.5.1. <i>Formule de Bour / Base mobile</i>	9
II.6. EXEMPLE - CENTRIFUGEUSE.....	10
III. CINEMATIQUE DU SOLIDE.....	11
III.1. LES MOUVEMENTS SIMPLES ET TRAJECTOIRES ASSOCIEES.....	11
III.2. CHAMP DES VECTEURS VITESSE (RELATION FONDAMENTALE).....	12
III.2.1. <i>Exemple - Engrenage</i>	12
III.3. COMPOSITION DES MOUVEMENTS.....	13
III.4. COMPOSITION DES VECTEURS VITESSE.....	14
III.4.1. <i>Exemple : Montgolfière</i>	14
III.5. COMPOSITION DES TORSEURS CINEMATIQUES.....	14
IV. CINEMATIQUE DU CONTACT PONCTUEL	14
IV.1. MODELE - POINTS COÏNCIDENTS DE CONTACT.....	14
IV.2. VITESSE DE GLISSEMENT.....	15
IV.3. EXEMPLE - VITESSE D'UN VEHICULE AUTOMOBILE.....	15

Annexe

I. FIGURE DE CHANGEMENT DE BASE / FIGURE DE CALCUL.....	17
I.1. CONSTRUCTION D'UNE FIGURE DE CHANGEMENT DE BASE.....	17
I.2. UTILISER UNE FIGURE DE CHANGEMENT DE BASE.....	18
II. PRODUIT SCALAIRE / FIGURE DE CHANGEMENT DE BASE.....	19
II.1. DEFINITION.....	19
II.2. UTILISATION DE LA FIGURE.....	19
III. PRODUIT VECTORIEL / FIGURE DE CHANGEMENT DE BASE.....	20
III.1. DEFINITION.....	20
III.2. UTILISATION DE LA FIGURE.....	21

La cinématique est la partie de la mécanique qui étudie les mouvements des corps indépendamment des actions qui les produisent.

L'objectif est d'être capable de décrire le mouvement à l'aide de ses caractéristiques : trajectoire, vitesse, accélération.

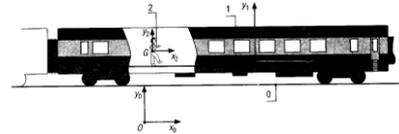
I. PARAMETRAGE DU MOUVEMENT D'UN SOLIDE

I.1. Référentiel

I.1.1. Notion de mouvement / Référence spatiale

Considérons un voyageur assis dans un train, le train étant en marche :

- Le voyageur est au repos par rapport au train.
- Le voyageur est en mouvement par rapport au sol



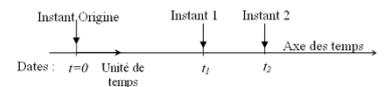
La notion de mouvement est relative. Il est indispensable de préciser par rapport à quel solide de référence le mouvement a lieu.

Pour faciliter les calculs on prendra la plupart du temps comme référence spatiale un repère orthonormé direct.

On note par exemple : $Mvt_{2/0}$: le mouvement du solide 2 par rapport au solide 0.

I.1.2. Notion de temps

Décrire le mouvement d'un corps dans un repère permet de connaître sa position, mais un repère seul ne nous dit pas à quel instant ce solide occupe telle position. Pour définir précisément la position d'un corps, il est indispensable d'associer à ce repère une base de temps.



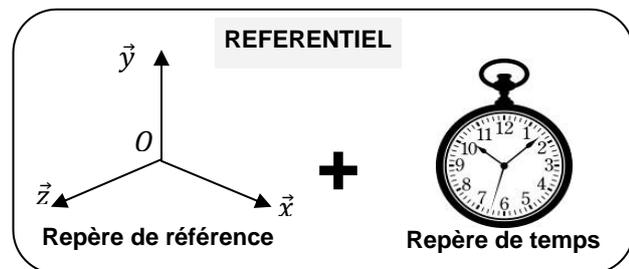
L'unité de mesure du temps sera la **seconde**

I.1.3. Système de référence / référentiel

La position d'un point M est donc une fonction à 3 variables de position (x_M, y_M, z_M par exemple), chacune de ces variables étant elle-même fonction du temps t.

L'espace à 4 dimensions $((O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}), t)$ est appelé référentiel R.

Nous noterons de la même façon le repère associé à ce référentiel.



I.1.4. Solide indéformable

Comme nous l'avons vu précédemment, une pièce mécanique (S) peut être considérée comme un solide indéformable si quels que soient les points A et B de (S) la distance AB reste constante au cours du temps.

I.1.5. Référentiel et solide indéformable

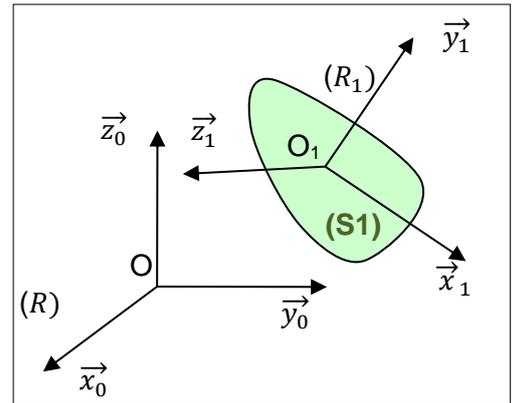
Un repère d'espace étant défini par une origine et trois vecteurs unitaires orthonormés, les extrémités de ces vecteurs sont à des distances fixes entre elles. Ceci étant vrai à chaque instant, un référentiel est donc équivalent à un solide. On associera donc à chaque solide un référentiel.

Etudier le mouvement d'un solide par rapport à un autre revient donc à étudier le mouvement des repères liés à ces solides.

I.2. Mouvement relatif entre deux solides

I.2.1. Paramétrage de la position d'un solide par rapport à un repère

Pour définir la position d'un solide indéformable (S1) dans un référentiel $R_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, il faut commencer par lier à ce solide (S1) un repère $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ et ensuite définir la position du repère R_1 par rapport au repère R_0 .



Le repère R_1 est caractérisé par son origine O_1 et sa base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$. Nous devons donc définir la position de l'origine O_1 dans R_0 et l'orientation de la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ de R_1 par rapport à la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ du repère R_0 .

Tous les repères introduits sont **orthonormés directs**.

Le déplacement de R_1 par rapport à R s'effectue donc avec six degrés de liberté :

- Trois degrés de liberté de translation caractérisés par le vecteur de position du point O_1 dans le repère R ,
- Trois degrés de liberté de rotation que l'on peut caractériser par trois angles.

A chaque degré de liberté on fait correspondre un paramètre.

I.2.2. Paramétrage de la position de l'origine

Les paramètres qui définissent la position d'un point dans un repère sont habituellement :

- les **coordonnées cartésiennes**,
- les **coordonnées cylindriques**,
- les **coordonnées sphériques**.

Le type de coordonnées choisi est fonction du problème que l'on a à traiter (problème à symétrie de révolution autour d'un axe, problème à symétrie sphérique,...).

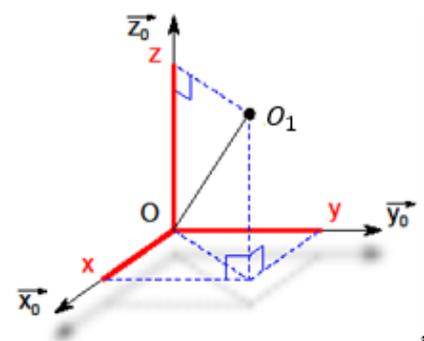
Coordonnées cartésiennes

Les coordonnées cartésiennes x, y, z du point O_1 sont les projections orthogonales du vecteur \vec{OO}_1 dans le repère R_0 .

$$\vec{OO}_1 = x \cdot \vec{x}_0 + y \cdot \vec{y}_0 + z \cdot \vec{z}_0$$

Les 3 paramètres sont l'abscisse x , l'ordonnée y et la cote z .

Avec $\|\vec{OO}_1\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$



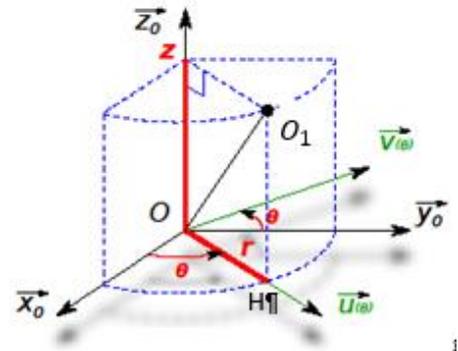
Coordonnées cylindriques

Soit :

- H la projection orthogonale du point O_1 sur le plan $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$.
- \vec{u} un vecteur unitaire de direction (OH) .

Les coordonnées cylindriques du point O_1 dans R sont :

- $r = \overline{OH}$: mesure algébrique de \overline{OH} sur l'axe (O, \vec{u}) .
- $\theta = (\vec{x}_0, \vec{u})$: angle orienté par le vecteur unitaire \vec{z} normal au plan (\vec{x}_0, \vec{u})
- z : la projection orthogonale de $\overline{OO_1}$ sur l'axe (O, \vec{z}_0)



$\overline{OO_1} = r \cdot \vec{u} + z \cdot \vec{z}_0$	Les 3 paramètres sont : <ul style="list-style-type: none"> • le rayon polaire r (positif), • l'angle polaire θ, • la cote z.
---	---

Remarque: Relations entre coordonnées cartésiennes et cylindriques $\begin{cases} x = r \cdot \cos \theta \\ y = r \cdot \sin \theta \end{cases}$

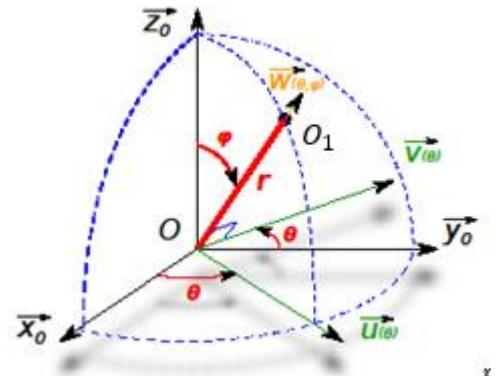
Coordonnées sphériques

Soit :

- H la projection orthogonale du point O_1 sur le plan $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$.
- \vec{u} un vecteur unitaire de direction (OH) .
- \vec{v} le troisième vecteur unitaire de la base orthonormée $(\vec{z}_0, \vec{u}, \vec{v})$
- \vec{w} un vecteur unitaire de direction (OO_1) .

Les coordonnées sphériques du point O_1 dans R sont :

- $r = \overline{OO_1}$: mesure algébrique de $\overline{OO_1}$ sur l'axe (O, \vec{w}) .
- $\theta = (\vec{x}_0, \vec{u})$: angle orienté par le vecteur unitaire \vec{z}_0 normal au plan (\vec{x}_0, \vec{u})
- $\phi = (\vec{z}_0, \vec{w})$: angle orienté par le vecteur unitaire \vec{v} normal au plan (\vec{z}_0, \vec{w}) .



$\overline{OO_1} = r \cdot \vec{w}$	Les 3 paramètres sont : <ul style="list-style-type: none"> • le rayon polaire r (positif), • l'angle polaire θ, • l'angle de colatitude ϕ (entre 0 et π)
-------------------------------------	---

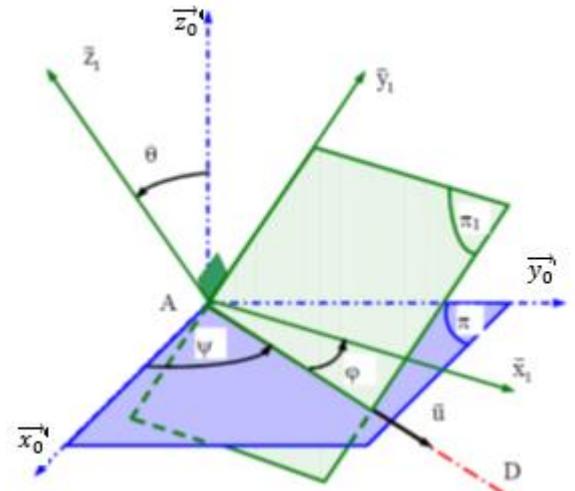
Remarque: Relations entre coordonnées cartésiennes et sphériques

$$\begin{cases} x = r \cdot \sin \phi \cdot \cos \theta \\ y = r \cdot \sin \phi \cdot \sin \theta \\ z = r \cdot \cos \phi \end{cases}$$

I.2.3. Paramétrage de l'orientation d'une base

Il faut et il suffit de trois paramètres indépendants pour orienter la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ du repère R_1 par rapport à la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ du repère R_0 .

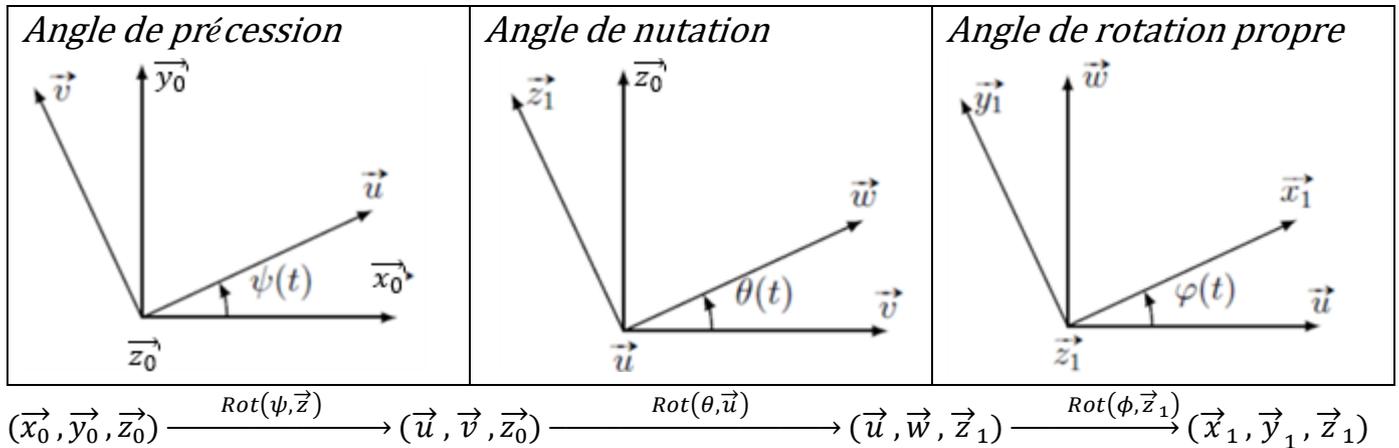
Les trois paramètres choisis peuvent être par exemple les **angles d'Euler**.



Les trois angles d'Euler sont les suivants :

- $\psi = (\vec{x}_0, \vec{u})$ angle orienté par (\vec{z}_0) (angle de précession),
- $\theta = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$ angle orienté par (\vec{u}) (angle de nutation),
- $\phi = (\vec{u}, \vec{x}_1)$ angle orienté par (\vec{z}_1) (angle de rotation propre)

On peut considérer que ces trois angles correspondent à trois rotation planes successives, qui permettent de faire coïncider la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ avec la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, ce qui définit au passage deux bases intermédiaires, orthonormées directes.



I.2.4. Changement de base d'un vecteur dans le cas d'une rotation autour d'un axe

Les figures planes de changement de base sont incontournables en cinématique. Il faut en dessiner autant qu'il y a de **paramètres angulaires**.

Pour chaque paramètre angulaire :

<ul style="list-style-type: none"> • dessiner la trame avec un angle faible, • identifier le vecteur commun aux deux bases, le faire apparaître sur la figure (\vec{z}_1), • compléter le dessin avec les autres vecteurs de base en respectant l'orientation directe de la base, • indiquer le paramètre angulaire θ 	
--	--

I.2.5. Paramétrage d'un mécanisme

Afin de déterminer les caractéristiques cinématiques (que l'on verra plus tard) dans les mécanismes, **on associe au schéma cinématique un paramétrage.**

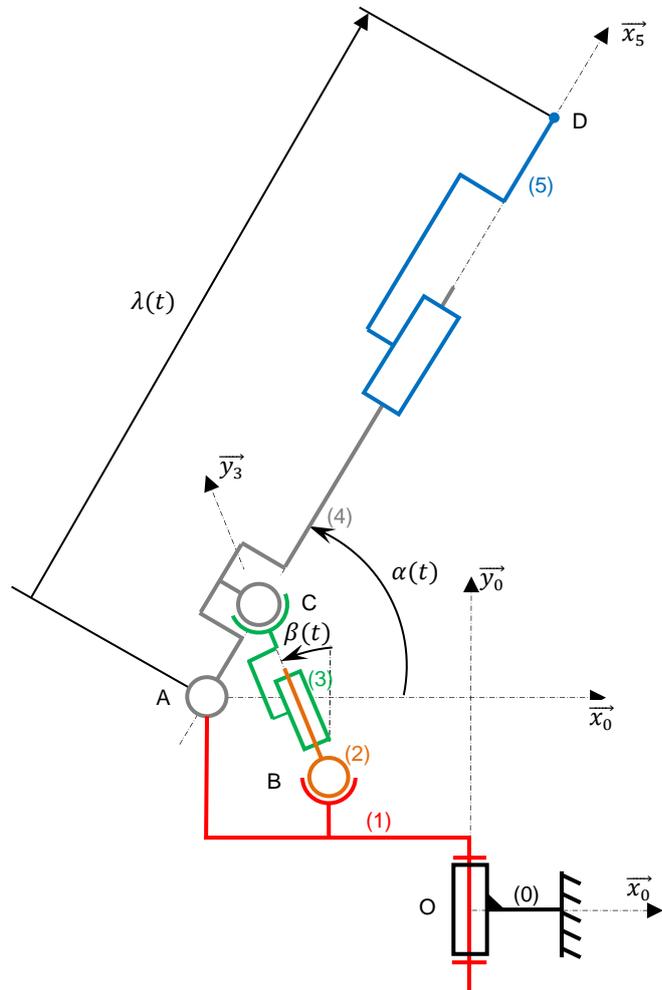
Exemple: Echelle de pompiers E.P.A.S

On définit par exemple:

- $\lambda(t)$ paramètre linéaire associé à la liaison glissière entre 5 et 4
- $\alpha(t)$ paramètre angulaire associé à la liaison pivot entre 4 et 1.

Remarques:

- **Les paramètres** sont des grandeurs qui peuvent évoluer en **fonction du temps** tandis que les **données géométriques** sont des **grandeurs fixes** du mécanisme.
- Dans la majorité des sujets de concours, le paramétrage vous est donné.



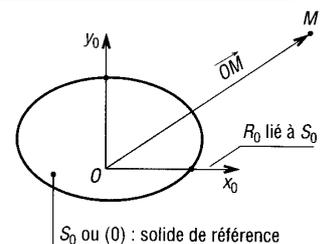
II. Cinématique du point

II.1. Point matériel

Un point matériel est un petit élément de matière dont on peut négliger les dimensions devant l'importance des phénomènes que l'on se propose d'étudier.

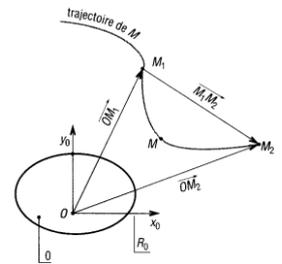
II.2. Vecteur position

Le vecteur position du point **M**, dans R_0 , à la date t est le vecteur : $\vec{OM} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}_{B_0}$



II.1. Vecteur déplacement

Si M_1 est la position du point M à l'instant t_1 et M_2 la position du point M à l'instant t_2 , le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ définit le déplacement de M entre t_1 et t_2 pendant la durée $(t_2 - t_1)$.



II.2. Trajectoire

La courbe définie dans le repère R_0 par les points M , pris dans l'ordre chronologique, s'appelle **trajectoire du point M par rapport à R_0** et notée : T_{M/R_0} .

Remarques :

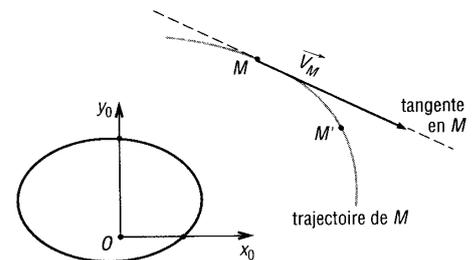
- la trajectoire est donc constituée d'un ensemble de points coïncidents pris dans l'ordre chronologique,
- pour un même point M , la trajectoire est fonction du repère d'observation.

II.3. Vecteur vitesse instantanée

La vitesse du point M par rapport au repère R_0 est, par définition, la dérivée par rapport au temps du vecteur position défini dans le repère R_0 :

$$\vec{V}_{(M/R_0)} = \left[\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right]_{R_0} \text{ en } m \cdot s^{-1}$$

Ou encore $\vec{V}_{(M/R_0)} = \frac{dx}{dt} \cdot \vec{x}_0 + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{y}_0 + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{z}_0 = \dot{x} \cdot \vec{x}_0 + \dot{y} \cdot \vec{y}_0 + \dot{z} \cdot \vec{z}_0$



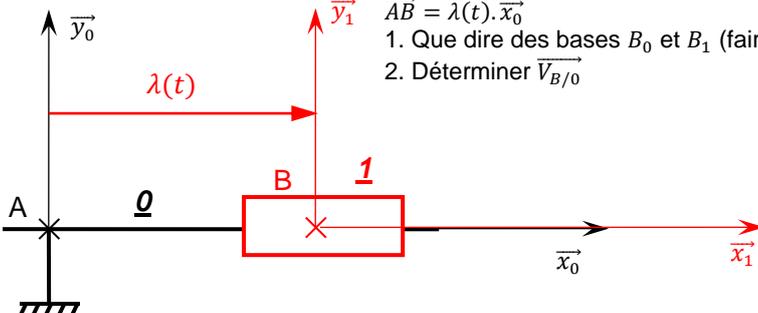
Rq : La vitesse instantanée d'un point par rapport à un repère est tangente à la trajectoire ce point par rapport à ce même repère.

Application 1 : Tramway Aérien calcul de vitesse



Soit $R_0(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère lié au bâti 0.
 Soit $R_1(B, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un repère lié au tramway (1)
 $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \cdot \vec{x}_0$

1. Que dire des bases B_0 et B_1 (faire une figure).
2. Déterminer $\vec{V}_{B/0}$



Remarques:

- $\vec{V}_{(M/R_0)} = \left[\frac{d\overrightarrow{QM}}{dt} \right]_{R_0}$ si Q est fixe dans R_0 .
- $\vec{V}_{(M/R_0)} = \vec{V}_{(M/O)}$ un référentiel est équivalent à un solide (solides indéformables)
- Par la suite nous verrons plusieurs méthodes de calcul du vecteur vitesse instantanée d'un point:
 - Par **dérivation du vecteur position**
 - A l'aide de la méthode du **champ des vecteurs vitesse (pour un point appartenant à un solide)**
 - En combinant la **composition des vecteurs vitesse** et l'une des 2 méthodes ci-dessus.

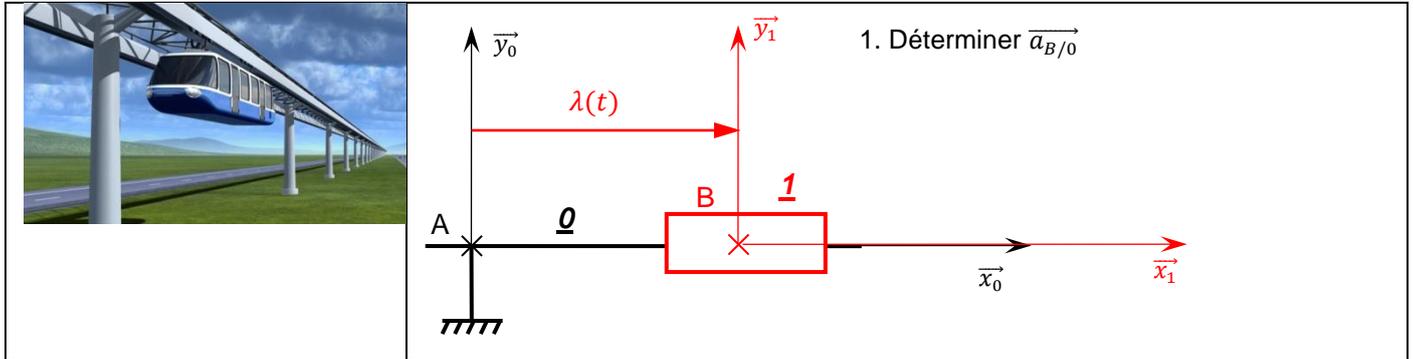
II.4. Vecteur accélération instantanée

L'accélération du point M par rapport au repère R_0 est, par définition, la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse défini dans le repère R_0 :

$$\vec{a}_{M/R_0} = \left[\frac{d\vec{V}_{M/R_0}}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2} \right]_{R_0} \quad \text{en } m..s^{-2}$$

Ou encore $\vec{a}_{M/R_0} = \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \vec{x}_0 + \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \vec{y}_0 + \frac{d^2z}{dt^2} \cdot \vec{z}_0 = \ddot{x} \cdot \vec{x}_0 + \ddot{y} \cdot \vec{y}_0 + \ddot{z} \cdot \vec{z}_0$

Application 2 : Tramway Aérien calcul d'accélération



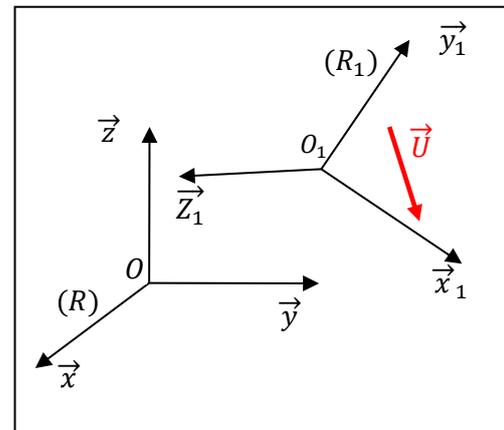
II.5. Dérivation temporelle d'un vecteur par rapport à un référentiel

II.5.1. Formule de Bour / Base mobile

La formule de dérivation de la base mobile par rapport à la base de référence est fondamentale, elle est la base de toutes les relations cinématiques.

Soient :

- un référentiel R de référence, $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ lié au bâti d'un système
- un repère R_1 , $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ en mouvement par rapport à R
- le vecteur $\vec{\Omega}_{R_1/R}$ de composantes $(\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma})$ dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, est le vecteur taux de rotation de la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ par rapport à la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$
- Soit un vecteur U exprimé dans R_1 : $\vec{U} = u \cdot \vec{x}_1 + v \cdot \vec{y}_1 + w \cdot \vec{z}_1$



Alors :

$$\left[\frac{d\vec{U}}{dt} \right]_R = \left[\frac{d\vec{U}}{dt} \right]_{R_1} + \vec{\Omega}_{(R_1/R)} \wedge \vec{U}$$

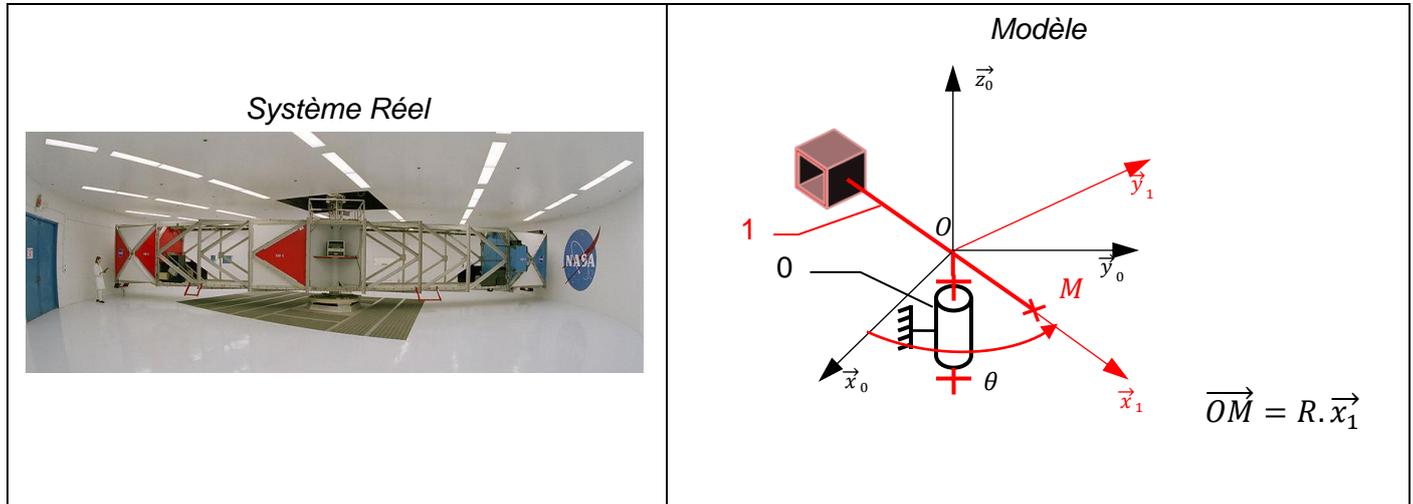
D'où la formule générale de dérivation composée d'un vecteur en mouvement par rapport à deux repères quelconques :

$$\text{Formule de Bour} \quad \left[\frac{d\vec{U}}{dt} \right]_{R_j} = \left[\frac{d\vec{U}}{dt} \right]_{R_i} + \vec{\Omega}_{(R_i/R_j)} \wedge \vec{U}$$

II.6. Exemple - Centrifugeuse

Les centrifugeuses sont utilisées pour la formation des astronautes et l'entraînement des pilotes militaires. Elles permettent de tester leur résistance aux accélérations importantes et de renforcer celle-ci.

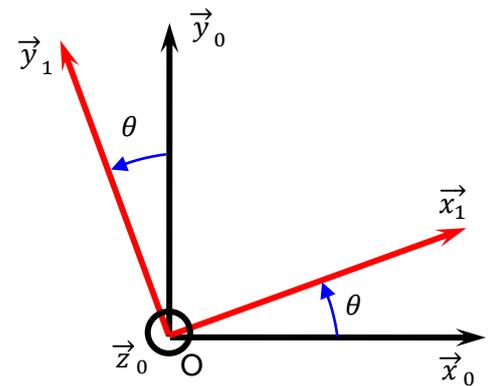
Il est donc très important d'être capable de déterminer la valeur de l'accélération provoquée par la machine. La fréquence de rotation de « croisière » de la centrifugeuse est de 40tr/min et la nacelle du pilote est située sur un rayon de 5m. On souhaite déterminer l'accélération ressentie par le pilote lors de l'essai.



Soit $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère lié au bâti 0.

Soit $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un repère lié à la centrifugeuse (solide 1).

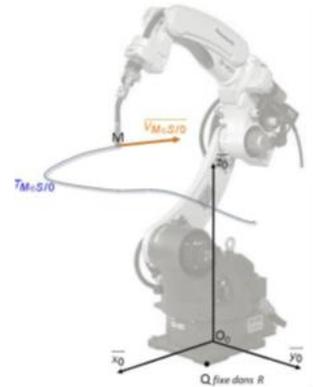
1. On réalise la figure plane permettant d'exprimer le paramétrage.
2. Définir le mouvement de la centrifugeuse par rapport au bâti.
3. Définir la trajectoire du point M par rapport au bâti.
4. Déterminer $\vec{V}_{M,1/0}$ en dérivant \vec{OM} par rapport au temps en projetant \vec{OM} .
5. Déterminer $\vec{V}_{M,1/0}$ et $\vec{a}_{M,1/0}$ en utilisant la formule de Bour.
6. Réaliser l'application numérique afin de déterminer l'accélération subie par le pilote.



III. Cinématique du solide

Dans bon nombre de cas nous serons amenés à étudier les caractéristiques cinématiques de **points appartenant à des solides en mouvements**. Les notations utilisées font alors apparaître cette notion d'appartenance. On notera par exemple :

- $T_{M \in S / R_0} = T_{M \in S / 0}$ (se lit : trajectoire de M appartient au solide S par rapport au solide 0)
- $\vec{V}_{M \in S / R_0} = \vec{V}_{M \in S / 0}$ (se lit : vitesse de M appartient au solide S par rapport au solide 0)
- $\vec{a}_{M \in S / R_0} = \vec{a}_{M \in S / 0}$ (se lit : accélération de M appartient au solide S par rapport au solide 0)



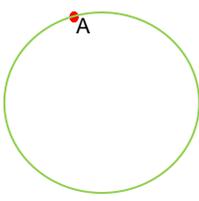
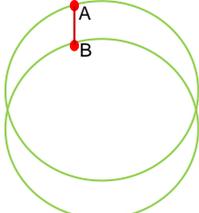
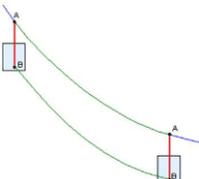
Remarque :

- Si le point M a une réalité physique sur le solide (S) alors :

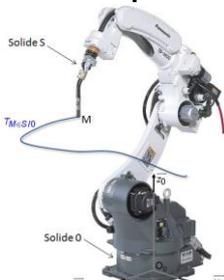
$$T_{M \in S / R_0} = T_{M / 0} ; \vec{V}_{M \in S / R_0} = \vec{V}_{M / 0} ; \vec{a}_{M \in S / R_0} = \vec{a}_{M / 0}$$
- Si le point M n'a pas de réalité physique sur le solide (S) alors :

$$T_{M \in S / R_0} \neq T_{M / 0} ; \vec{V}_{M \in S / R_0} \neq \vec{V}_{M / 0} ; \vec{a}_{M \in S / R_0} \neq \vec{a}_{M / 0}$$

III.1. Les mouvements simples et trajectoires associées

<p>mouvement de translation rectiligne</p> 		<p>Les trajectoires des points appartenant à un solide en mouvement de translation rectiligne sont des segments de droite</p>
<p>mouvement de rotation autour d'un axe fixe</p> 		<p>Les trajectoires des points appartenant à un solide en mouvement de rotation autour d'un axe fixe sont des arcs de cercle de même centre (dans le plan) ou de même axe (dans l'espace).</p>
<p>mouvement de translation circulaire</p> 		<p>Les trajectoires des points appartenant à un solide en mouvement de translation circulaire sont des arcs de cercle de même rayon.</p>
<p>mouvement de translation curviligne</p> 		<p>Les trajectoires de points appartenant à un solide en mouvement de translation curviligne décrivent des courbes superposables.</p>

Remarque: nous reverrons ces différents mouvements et leur caractéristiques lors de l'étude spécifique des mouvements plan/plan.

<p>Mouvement quelconque</p> 	<p>Les trajectoires de points appartenant à un solide en mouvement quelconque décrivent des courbes quelconques.</p>
--	--

III.2. Champ des vecteurs vitesse (relation fondamentale)

On considère un solide (S_1) en mouvement par rapport à un repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ et **A** et **B** deux points distincts du solide (S_1). On désigne par $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ le repère lié au solide (S_1).

Relation du champ des vecteurs vitesses d'un solide :

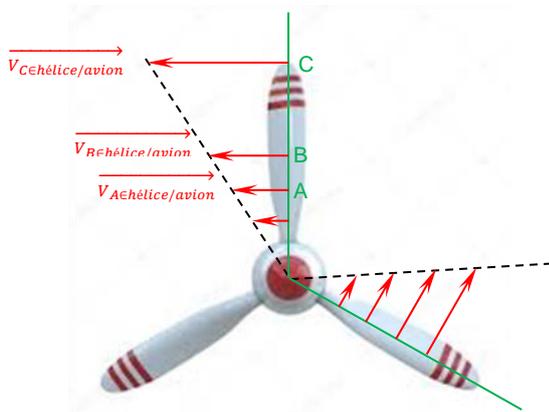
$$\vec{V}_{(B \in S_1/R_0)} = \vec{V}_{(A \in S_1/R_0)} + \vec{BA} \wedge \vec{\Omega}_{(S_1/R_0)} \text{ ou } \vec{V}_{(B \in R_1/R_0)} = \vec{V}_{(A \in R_1/R_0)} + \vec{BA} \wedge \vec{\Omega}_{(R_1/R_0)}$$

Cette relation montre que les vecteurs vitesses des points d'un même solide vérifient la relation d'un champ des moments d'un torseur. Par suite, **le champ des vecteurs des vitesses des points d'un solide répond à la définition d'un torseur.**

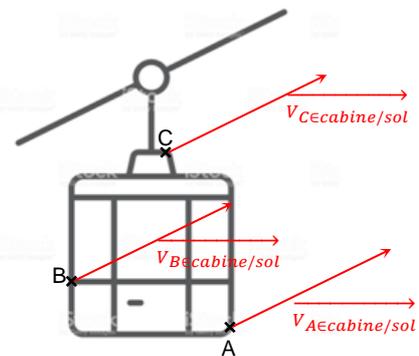
$$\{V_{(S_1/R_0)}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{(S_1/R_0)} \\ \vec{V}_{(A \in S_1/R_0)} \end{array} \right\} \quad \{V_{(S_1/R_0)}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{(S_1/R_0)} \\ \vec{V}_{(B \in S_1/R_0)} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{(S_1/R_0)} \\ \vec{V}_{(B \in S_1/R_0)} = \vec{V}_{(A \in S_1/R_0)} + \vec{BA} \wedge \vec{\Omega}_{(S_1/R_0)} \end{array} \right\}$$

Remarque: Cette relation n'est valable que pour deux points appartenant réellement ou fictivement à un même solide

Exemples :



Champ des vecteurs vitesse pour un solide en rotation



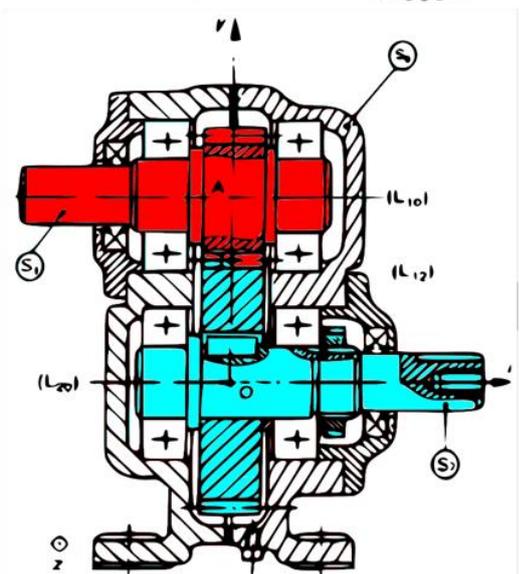
Champ des vecteurs vitesse pour un solide en translation

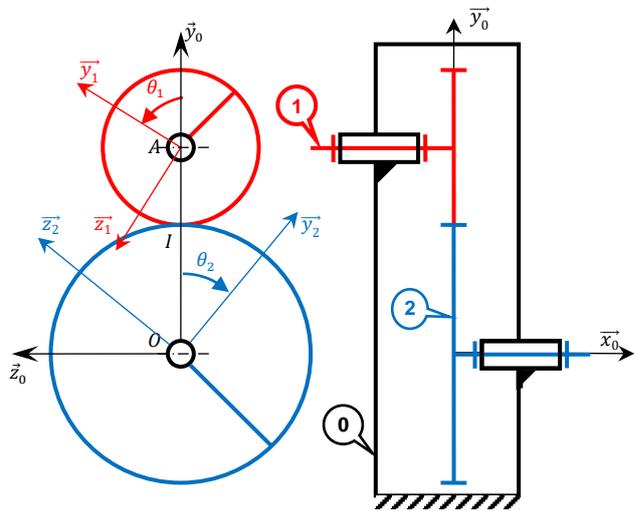
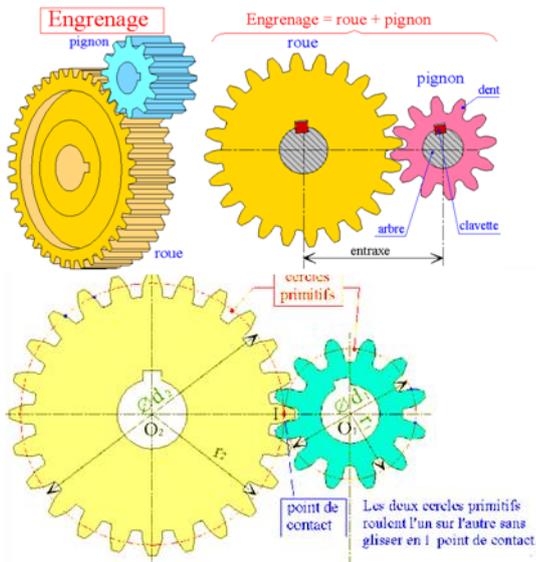
III.2.1. Exemple - Engrenage

Soit le réducteur dont le dessin est donné (figure ci-contre). L'engrenage est cylindrique droit à profil en développante de cercle, d'angle de pression $\alpha = 20^\circ$. Le paramétrage et le schéma cinématique de ce réducteur sont donnés ci-dessous (on précise $r_1 = IA$ et $r_2 = IO$).

Avec:

- $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère lié au solide (0).
- $R_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un repère lié au solide (1) avec $(\vec{y}_0, \vec{y}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1) = \theta_1$
- $R_2(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ un repère lié au solide (2) avec $(\vec{y}_0, \vec{y}_2) = (\vec{z}_0, \vec{z}_2) = \theta_2$





1. Réaliser les figures de calcul et indiquer les vecteurs taux de rotation.
2. Déterminer \vec{V}_{I/R_0} par dérivation du vecteur position.
3. Déterminer $\vec{V}_{I\epsilon 1/R_0}$ par application de la formule du champ des vecteurs vitesse.
4. Déterminer $\vec{V}_{I\epsilon 2/R_0}$ par application de la formule du champ des vecteurs vitesse.

Remarques

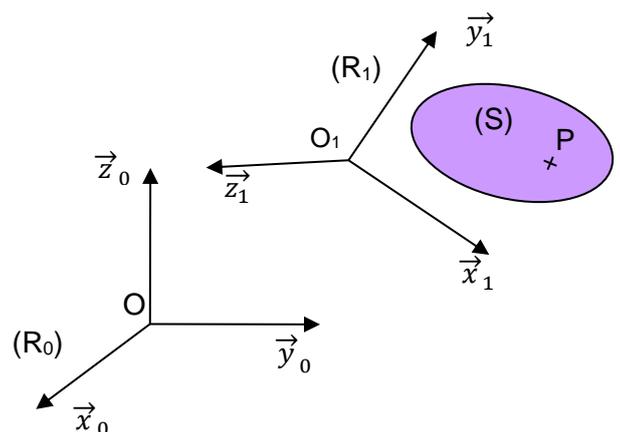
Lorsque deux solides (S1) et (S2), en mouvement par rapport à un repère R_0 , sont en contact ponctuel en un point (I), il faut pour les différents calculs de vitesses, distinguer au point de contact (I), à un instant donné, trois points :

- un point (I) lié à (S1), $\vec{V}_{I\epsilon 1/R_0}$
- un point (I) lié à (S2), $\vec{V}_{I\epsilon 2/R_0}$
- le point de contact, qui n'appartient à aucun des deux solides, on parle de point géométrique, \vec{V}_{I/R_0}

III.3. Composition des mouvements

Considérons un solide (S) en mouvement dans un repère $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, lui-même en mouvement par rapport à un repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ fixe. Soit P un point de ce solide (S).

- Le mouvement de (S) par rapport à R_0 est appelé « mouvement absolu »
- Le mouvement de (S) par rapport à R_1 est appelé « mouvement relatif »
- Le mouvement de R_1 par rapport à R_0 est appelé « mouvement d'entraînement »



III.4. Composition des vecteurs vitesse

La relation de composition des vecteurs vitesse s'écrit :

$$\underbrace{\vec{V}_{(P \in S/R_0)}}_{\text{Vitesse absolue}} = \underbrace{\vec{V}_{(P \in S/R_1)}}_{\text{Vitesse relative}} + \underbrace{\vec{V}_{(P \in R_1/R_0)}}_{\text{vitesse d'entraînement}}$$

Remarque : Notion de points coïncidents

Le point P coïncident dans R_1 est le point appartenant à R_1 qui à cet instant donné coïncide avec le point P appartenant au solide (S).

La relation de composition des vecteurs vitesse de rotation s'écrit :

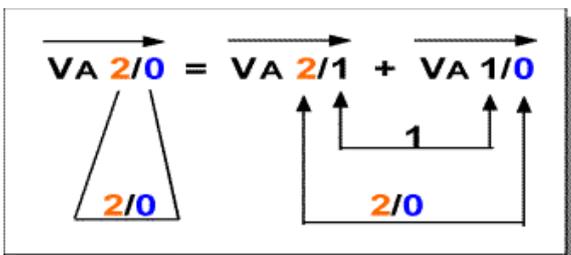
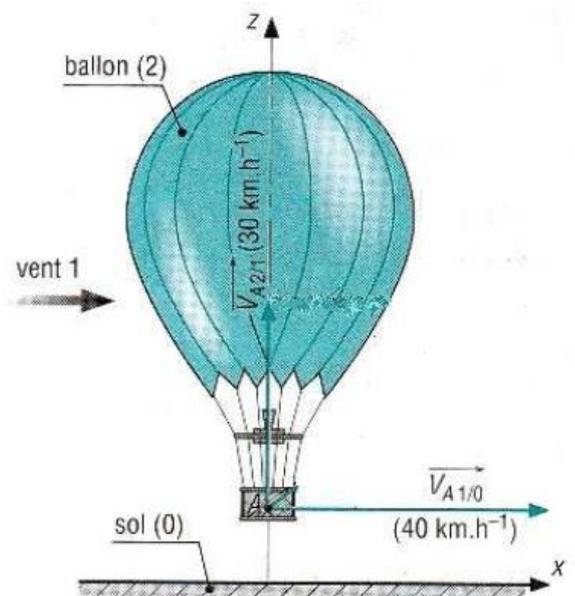
$$\underbrace{\vec{\Omega}_{(S/R_0)}}_{\text{Vitesse absolue}} = \underbrace{\vec{\Omega}_{(S/R_1)}}_{\text{Vitesse relative}} + \underbrace{\vec{\Omega}_{(R_1/R_0)}}_{\text{vitesse d'entraînement}}$$

III.4.1. Exemple : Montgolfière

Un ballon de démonstration 2 monte verticalement par rapport à la masse d'air 1 qui l'entoure et l'entraîne avec une vitesse d'ascension de 30 km/h.

La masse d'air se déplace horizontalement par rapport au sol 0, vitesse du vent de 40 km/h. Il n'y a pas de balancement du ballon.

- Déterminer la vitesse du point A appartenant à la nacelle par rapport au sol 0.



III.5. Composition des torseurs cinématiques

Les deux relations précédentes permettent de traduire l'égalité :

$$\{V_{(S/R_0)}\} = \{V_{(S/R_1)}\} + \{V_{(R_1/R_0)}\}$$

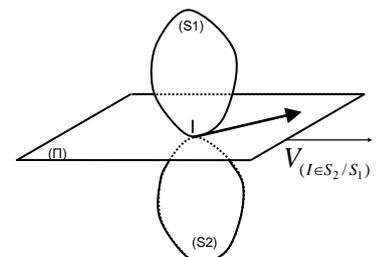
IV. Cinématique du contact ponctuel

IV.1. Modèle - Points coïncidents de contact

Considérons deux solides (S_1) et (S_2) en contact ponctuel au point I. Soit (Π) le plan tangent commun en I à (S_1) et (S_2).

On caractérise le mouvement relatif du solide 2 par rapport à 1 par le torseur

cinématique $\{V_{(S_2/S_1)}\}$ $\{V_{(S_2/S_1)}\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{(S_2/S_1)} \\ \vec{V}_{(I \in S_2/S_1)} \end{Bmatrix}$



On constate qu'à partir du modèle proposé l'existence de 3 points particuliers :

- Le point I appartenant au solide 1
- Le point I appartenant au solide 2
- Le point I, point géométrique de contact (n'appartenant ni au solide 1 ni au solide 2).

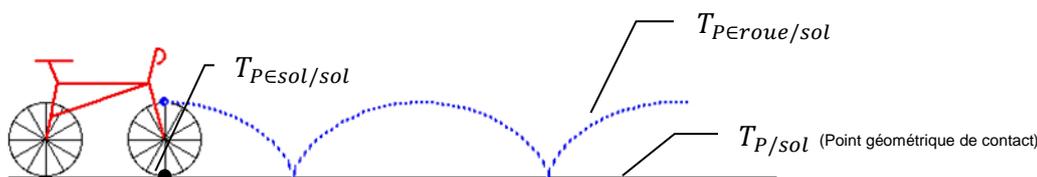
Les deux premiers points ont une existence matérielle différente et coïncident au moment du contact avec le 3^{ème} point. Les 3 points sont confondus à l'instant t et ne le sont plus à l'instant t + Δt. Par conséquent :

$$\vec{V}_{(I \in S_2/R)} \neq \vec{V}_{(I/R)} \text{ et } \vec{V}_{(I \in S_1/R)} \neq \vec{V}_{(I/R)}$$

Exemple roue de vélo

Lorsqu'une roue se déplace sur le sol, au point de contact P entre la roue et le sol, on distingue :

- $P \in \text{sol}$: c'est le gravillon fixe du bitume, sa trajectoire par rapport au sol est un point.
- $P \in \text{roue}$: il est attaché à la roue, sa trajectoire par rapport au sol est une cycloïde.
- P : point géométrique de contact, sa trajectoire appartient au sol (elle représente les positions successives prises par le point géométrique de contact entre la roue et le sol).



IV.2. Vitesse de glissement

Le vecteur vitesse de glissement du point I du solide (S_2) par rapport au solide (S_1) est le vecteur vitesse d'entraînement du point P dans le mouvement de (S_2) par rapport à (S_1), soit :

$\vec{V}_{(I \in S_2/S_1)}$ cette vitesse se trouve dans le plan (Π)

⚠ Il ne faut jamais utiliser le calcul direct pour déterminer la vitesse de glissement. Il faut décomposer cette vitesse

$$\vec{V}_{(I \in S_2/S_1)} = \vec{V}_{(I \in S_2/R)} - \vec{V}_{(I \in S_1/R)}$$

Condition de roulement sans glissement:

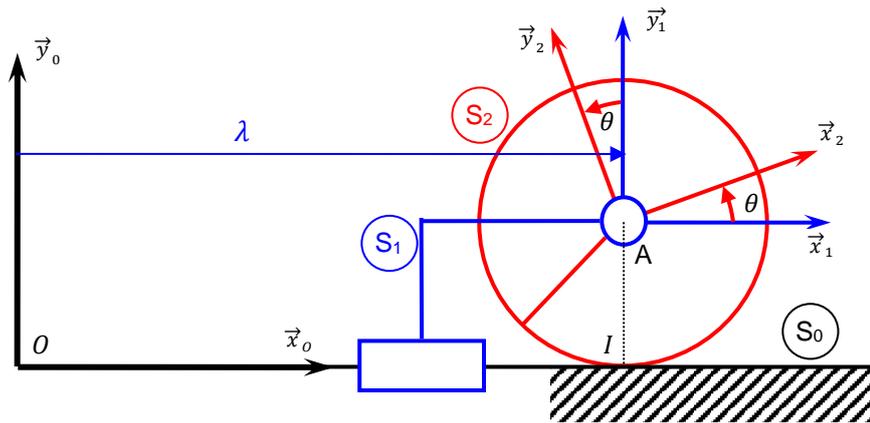
On dira que (S_2) roule sans glisser sur (S_1) si : $\vec{V}_{(I \in S_2/S_1)} = \vec{0}$

IV.3. Exemple - Vitesse d'un véhicule automobile

Soit un véhicule quelconque vérifiant 2 hypothèses fondamentales :

- le véhicule est en mouvement de translation par rapport au sol.
- on suppose qu'il y a roulement sans glissement au contact roue/sol.



Modélisation - paramétrage

On pose :

- S0= Sol
- S1= Châssis
- S2= Roue
- Le rayon de la roue est : R
- Le véhicule est équipé de pneu 205/55 R16
- La vitesse de translation du châssis/sol est : $\forall P$ on a $\overrightarrow{V_{P \in 1/0}} = V_{1/0} \cdot \vec{x}_0$
- La vitesse de rotation de la roue/châssis est : $\overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \omega_{2/1} \cdot \vec{z}_0$
- NB : $\omega_{2/1} < 0$ si $V_{1/0} > 0$

- Quelques infos sur les pneus-**Pneus : 185/60 R15, 195/60 R16 ou encore 205/55 R17 ça veut dire quoi ?**

Avant de **changer les pneus** sur votre voiture et surtout si vous demandez des devis en ligne ou par téléphone pour connaître le prix des pneus pour votre voiture, il faut absolument relever la dimension qui se trouve sur le côté du pneu.

Exemple : 205/55 R16 91V

- Largeur du pneu = 205 (votre pneu fait 20,5 cm de largeur)
 - Hauteur du pneu = 55 (La hauteur du pneu fait 55% de sa largeur)
 - Diamètre de la jante = 16 pouces (1pouce=0.0254m)
 - Indice de charge = 91
 - Indice de vitesse = V (votre pneu supporte une vitesse maximum de 240 Km/h, au delà il y a un risque réel d'éclatement du pneu)
1. En exprimant la condition de roulement sans glissement en I en déduire la relation entre $\omega_{2/1}$ et $V_{1/0}$.
 2. Déterminer la vitesse de translation du véhicule, on prendra comme vitesse de rotation de la roue 15tr/s

Annexe - Figure de changement de base

I. Figure de changement de base / figure de calcul

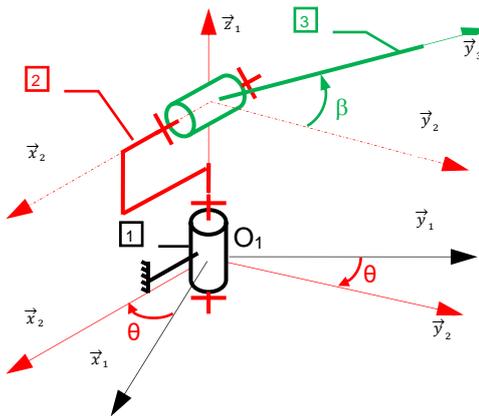
Lorsque l'on travaille sur les mécanismes, on associe à chaque pièce (ou groupe de pièces assemblées entre elles) une base orthonormée directe : $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}), (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1), (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2), \dots$

Ces bases sont en mouvement les unes par rapport aux autres. En général, il s'agit de mouvement simple : rotation autour d'un axe, translation à trajectoire rectiligne...

Fréquemment, on est amené à exprimer dans une base un vecteur dont on connaît les composantes dans une autre base.

Pour cela on utilise une figure de changement de base.

I.1. Construction d'une figure de changement de base



Pour chaque paramètre angulaire :

- dessiner la trame (trièdre positif) avec un angle faible (fig. 1),
- identifier le vecteur commun aux deux bases, le faire apparaître sur la figure ici (\vec{z}_1) (fig. 2) :
 - Perpendiculaire à votre feuille
 - Dirigé vers vous (le sens positif de la figure est alors le sens trigo)
- compléter le dessin avec les autres vecteurs de base en respectant l'orientation directe de la base (fig. 3),
- indiquer le paramètre angulaire ici θ (fig. 4).

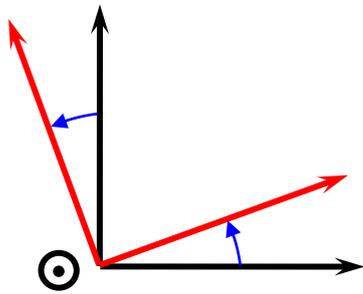


Figure 1

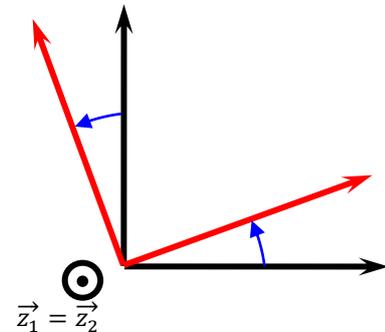


Figure 2

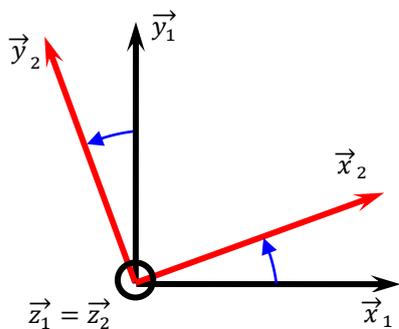


Figure 3

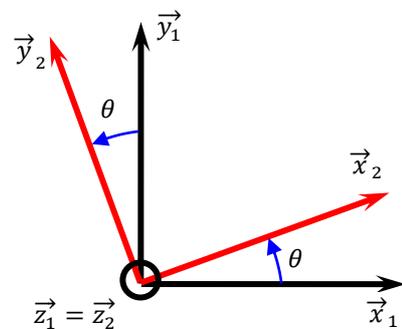


Figure 4

Dans ce cas là la projection des vecteurs de la base B2 dans la base B1 donne :

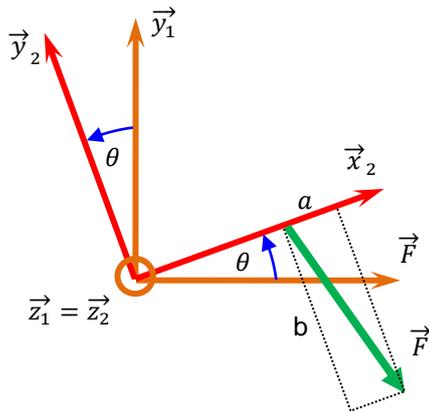
$$\begin{aligned}\vec{x}_2 &= \cos \theta \cdot \vec{x}_1 + \sin \theta \cdot \vec{y}_1 \\ \vec{y}_2 &= -\sin \theta \cdot \vec{x}_1 + \cos \theta \cdot \vec{y}_1\end{aligned}$$

I.2. Utiliser une figure de changement de base

Soit le vecteur \vec{F} exprimé dans la base $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ tel que:

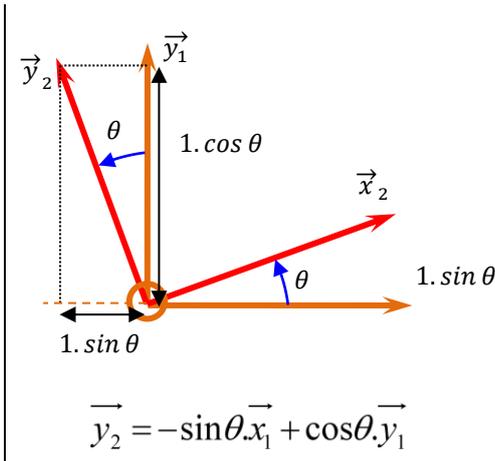
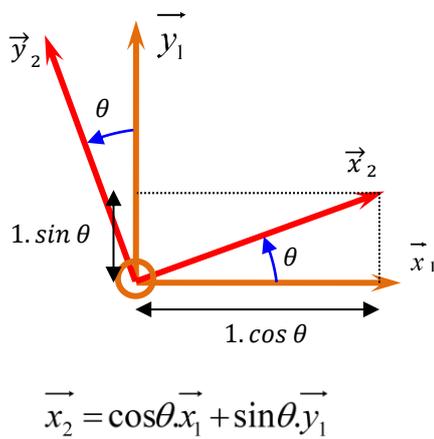
$$\vec{F} = a.\vec{x}_2 - b.\vec{y}_2.$$

Afin d'exprimer le vecteur \vec{F} dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ il suffit d'exprimer (\vec{x}_2) et (\vec{y}_2) dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ et de remplacer leur expression dans celle de \vec{F} .



A l'aide de la figure de changement de base, on voit que:

On raisonne dans des triangles rectangles dont l'hypoténuse vaut 1 (vecteur unitaire) pour trouver les composantes du vecteur projeté dans l'autre base.



on a donc:

$$\vec{F} = a(\cos\theta.\vec{x}_1 + \sin\theta.\vec{y}_1) - b(-\sin\theta.\vec{x}_1 + \cos\theta.\vec{y}_1) = (a \cos\theta + b \sin\theta).\vec{x}_1 + (a \sin\theta - b \cos\theta).\vec{y}_1$$

On peut remarquer que seules 4 projections sont possibles, il faut donc les retrouver rapidement et sans erreur.

	$\vec{x}_2 = \cos\theta.\vec{x}_1 + \sin\theta.\vec{y}_1$ $\vec{y}_2 = -\sin\theta.\vec{x}_1 + \cos\theta.\vec{y}_1$ $\vec{x}_1 = \cos\theta.\vec{x}_2 - \sin\theta.\vec{y}_2$ $\vec{y}_1 = \sin\theta.\vec{x}_2 + \cos\theta.\vec{y}_2$
--	--

II. Produit scalaire / figure de changement de base

II.1. Définition

Le produit scalaire des 2 vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 est un scalaire noté $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$, tel que:

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \|\vec{V}_1\| \cdot \|\vec{V}_2\| \cdot \cos \theta \text{ ce nombre peut-être } \underline{\text{positif}} \text{ ou } \underline{\text{négatif}}$$

Expression analytique

Soient $\vec{V}_1 = x_1 \cdot \vec{x} + y_1 \cdot \vec{y} + z_1 \cdot \vec{z}$ et $\vec{V}_2 = x_2 \cdot \vec{x} + y_2 \cdot \vec{y} + z_2 \cdot \vec{z}$

Alors $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$

Propriétés

- Symétrie: $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \vec{V}_2 \cdot \vec{V}_1$
- Distributivité: $\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3$

Cas particuliers

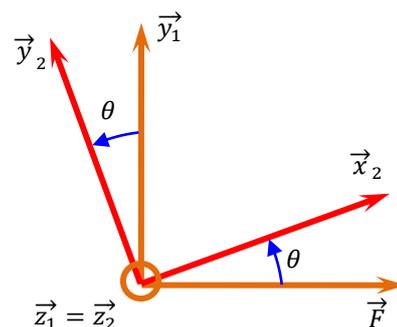
Le produit scalaire est nul ($\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 0$) si:

- un des vecteurs est nul, $\vec{V}_1 = \vec{0}$ et / ou $\vec{V}_2 = \vec{0}$
- les deux vecteurs sont perpendiculaires $\cos(\vec{V}_1, \vec{V}_2) = 0$

II.2. Utilisation de la figure

Le **produit scalaire** $\vec{V} \cdot \vec{x}$ permet de faire la **projection d'un vecteur \vec{V} sur un axe \vec{x}** d'une base orthonormé ($\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$). On l'utilisera en particulier pour déterminer la **composante d'un vecteur** (vitesse, force, moment,...) **sur un des trois axes d'une base**.

En pratique, à l'aide de la **figure de changement de base** on peut déterminer le résultat des différents **produits scalaires des vecteurs unitaires des deux bases de la figure**.



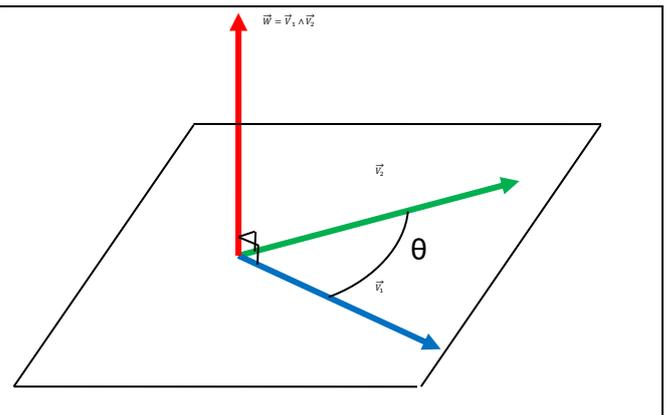
<p>Pour 2 vecteurs unitaires de la même base (la figure n'est pas nécessaire)</p> <p>Produits scalaire de vecteurs différents:</p> $\vec{x}_1 \cdot \vec{y}_1 = 0 \quad \vec{x}_1 \cdot \vec{z}_1 = 0 \quad \vec{y}_1 \cdot \vec{z}_1 = 0$ <p>Produit scalaire du même vecteur:</p> $\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_1 = 1 \quad \vec{y}_1 \cdot \vec{y}_1 = 1 \quad \vec{z}_1 \cdot \vec{z}_1 = 1$	<p>Pour 2 vecteurs unitaires de deux bases différentes définis sur la même figure de changement de base.</p> <p>4 cas peuvent être possibles:</p> <ul style="list-style-type: none"> • $\vec{x}_2 \cdot \vec{x}_1 = \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 = \cos \theta$ • $\vec{y}_2 \cdot \vec{x}_1 = \vec{x}_1 \cdot \vec{y}_2 = \cos(\theta + \frac{\pi}{2})$ • $\vec{y}_1 \cdot \vec{x}_2 = \vec{x}_2 \cdot \vec{y}_1 = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$ • $\vec{y}_2 \cdot \vec{y}_1 = \vec{y}_1 \cdot \vec{y}_2 = \cos \theta$
<p>Pour deux vecteurs unitaires de base différentes <u>qui ne sont pas définis sur la même figure de changement de base</u>, il faut obligatoirement <u>projeter</u> un des deux vecteurs afin de se retrouver dans un des cas décrits ci-dessus.</p>	

III. Produit vectoriel / figure de changement de base

III.1. Définition

Le produit vectoriel des 2 vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 est un vecteur noté $\vec{W} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$, tel que:

- \vec{W} est perpendiculaire au plan formé par \vec{V}_1 et \vec{V}_2
- $(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{W})$ forment un trièdre direct
- sa norme $\|\vec{W}\| = \|\vec{V}_1\| \cdot \|\vec{V}_2\| \cdot \sin \theta$ avec θ angle entre \vec{V}_1 et \vec{V}_2



Expression analytique (voir cours M3)

Propriétés

- Antisymétrie: $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = -\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1$
- Distributivité: $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_3$

Cas particuliers

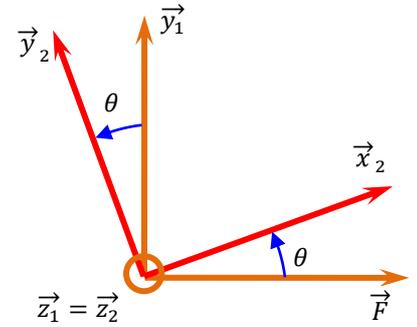
Le produit scalaire est nul ($\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{0}$) si:

- un des vecteurs est nul, $\vec{V}_1 = \vec{0}$ et / ou $\vec{V}_2 = \vec{0}$
- les deux vecteurs sont colinéaires $\sin(\vec{V}_1, \vec{V}_2) = 0$

III.2. Utilisation de la figure

Le **produit vectoriel** apparaît très souvent dans les relations utilisées en sciences de l'ingénieur (notamment la formule de changement de point d'un torseur)

En pratique, à l'aide de la **figure de changement de base** on peut déterminer le résultat des différents **produits vectoriels des vecteurs unitaires des deux bases de la figure**.



<p>Pour 2 vecteurs unitaires de la même base (la figure n'est pas nécessaire) Produits vectoriels dans le sens direct:</p> <div style="text-align: center;"> <p>$\vec{x}_1 \rightarrow \vec{y}_1 \rightarrow \vec{z}_1 \rightarrow \vec{x}_1$</p> </div> $\vec{x}_1 \wedge \vec{y}_1 = \vec{z}_1 \quad \vec{y}_1 \wedge \vec{z}_1 = \vec{x}_1 \quad \vec{z}_1 \wedge \vec{x}_1 = \vec{y}_1$ <p>Produits vectoriels dans le sens indirect:</p> <div style="text-align: center;"> <p>$\vec{x}_1 \rightarrow \vec{y}_1 \rightarrow \vec{z}_1 \rightarrow \vec{x}_1$</p> </div> $\vec{z}_1 \wedge \vec{y}_1 = -\vec{x}_1 \quad \vec{x}_1 \wedge \vec{z}_1 = -\vec{y}_1 \quad \vec{y}_1 \wedge \vec{x}_1 = -\vec{z}_1$	<p>Pour 2 vecteurs unitaires de deux bases différentes définis sur la même figure de changement de base.</p> <p>Signe + si on fait le produit vectoriel dans le sens trigonométrique</p> <div style="text-align: center;"> </div> $\vec{x}_1 \wedge \vec{x}_2 = + \sin \theta \vec{z}_1$ $\vec{x}_1 \wedge \vec{y}_2 = + \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) \vec{z}_1$ $\vec{x}_2 \wedge \vec{y}_1 = + \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) \vec{z}_1$ $\vec{y}_1 \wedge \vec{y}_2 = + \sin \theta \vec{z}_1$ <p>Signe - si on fait le produit vectoriel dans le sens horaire</p> <div style="text-align: center;"> </div> $\vec{y}_2 \wedge \vec{y}_1 = - \sin \theta \vec{z}_1$ $\vec{y}_2 \wedge \vec{x}_1 = - \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) \vec{z}_1$ $\vec{y}_1 \wedge \vec{x}_2 = - \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) \vec{z}_1$ $\vec{x}_2 \wedge \vec{x}_1 = - \sin \theta \vec{z}_1$
<p>Pour deux vecteurs unitaires de base différentes <u>qui ne sont pas définis sur la même figure de changement de base</u>, il faut obligatoirement <u>projeter</u> un des deux vecteurs afin de se retrouver dans un des cas décrits ci-dessus.</p>	