Fiche outil -Produit scalaire

Définition

Le produit scalaire est une opération qui associe à deux vecteurs un scalaire et est noté : $\lambda = \overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2}$.

Le produit scalaire de deux vecteurs est un scalaire

Approche analytique

Soient $\vec{V}_1 = x_1.\vec{x} + y_1.\vec{y} + z_1.\vec{z}$ et $\vec{V}_2 = x_2.\vec{x} + y_2.\vec{y} + z_2.\vec{z}$ exprimés dans la base othonormée directe $B_1(\vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$

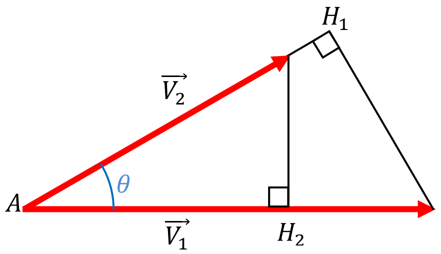
Alors $\boldsymbol{\vec{V}_1.\vec{V}_2 = x_1.x_2 + y_1.y_2 + z_1.z_2}$

Approche géométrique

$$\boldsymbol{\vec{V}_1.\vec{V}_2 = V_1.V_2.\cos\theta}$$

Remarque :

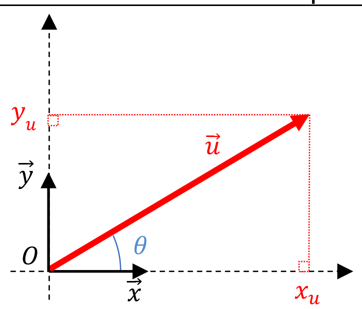
- Si : $\theta = 0$ alors $\vec{V}_1.\vec{V}_2 = V_1.V_2$
- Si : $\theta = \frac{\pi}{2}$ alors $\vec{V}_1.\vec{V}_2 = 0$



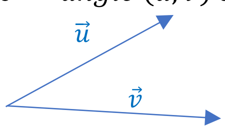
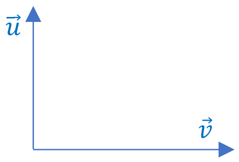
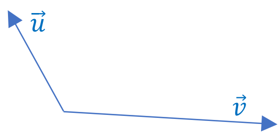
$\left.\begin{array}{l}\vec{V_1}.\vec{V_2} = \|\vec{V_1}\|.\overline{AH_2} \\ \vec{V_1}.\vec{V_2} = \|\vec{V_2}\|.\overline{AH_1}\end{array}\right\}$ *Le signe du produit scalaire est inclu dans la valeur algébrique*

Projection d'un vecteur sur un axe

Pour déterminer la projection d'un vecteur sur un axe de la base, il suffit de faire le produit scalaire de ce vecteur par le vecteur unitaire correspondant :

	• $\vec{u}.\vec{x} = x_u = \|\vec{u}\|.cos\theta$ • $\vec{u}.\vec{y} = y_u = \|\vec{u}\|.sin\theta$ • $\vec{u} = x_u.\vec{x} + y_u.\vec{y} = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}_B$

Propriétés du produit scalaire

$\vec{u}.\vec{v} > 0 \Leftrightarrow angle\ (\vec{u},\vec{v})\ est\ aigu$	$\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u}\ et\ \vec{v}\ sont\ orthogonaux$	$\vec{u}.\vec{v} < 0 \Leftrightarrow angle\ (\vec{u},\vec{v})\ est\ obtus$
		

- Le produit scalaire est symétrique : $\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}}$
- Le produit scalaire est distributif : $\boldsymbol{\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}}$