SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGENIEUR

DC3_Modéliser, schématiser et représenter les mécanismes d'un système

Analyser la structure des mécanismes

Objectifs	• Analyser la structure d'un mécanisme en vue de déterminer son éventuel hyperstatisme • Analyser la structure d'un mécanisme en vue de déterminer des liaisons équivalentes

Savoirs

Je connais:

- Degrés de mobilité et d'hyperstaticité
- La notion de contrainte géométrique associée à un hyperstatisme
- La notion de liaison équivalente

Savoir Faire

Je sais faire:

- Identifier l'architecture structurelle d'un mécanisme
- Déterminer la liaison cinématiquement équivalente à un ensemble de deux liaisons.
- Déterminer le degré de mobilité et d'hyperstatisme d'un mécanisme
- Déterminer les contraintes géométriques associées à un hyperstatisme

Sommaire

I. MODELISATION 3
II. STRUCTURE DES MECANISMES ET CHAINES DE SOLIDES 3
III. LIAISONS CINEMATIQUEMENT EQUIVALENTES 4
III.1. DEFINITION 4
III.2. LIAISONS EN PARALLELE 4
III.2.1. Détermination de la liaison équivalente à plusieurs liaisons en parallèle 4
III.3. LIAISONS EN SERIE 5
III.3.1. Détermination de la liaison équivalente à plusieurs liaisons en série 6
IV. DEGRES DE MOBILITE D'UN MECANISME 7
V. NOTION D'ISOSTATISME - D'HYPERSTATISME 8
V.1. DEFINITION 8
V.2. CALCUL DU DEGRE D'HYPERSTATISME 9

Annexe- Calcul vectoriel

I. VECTEUR 10

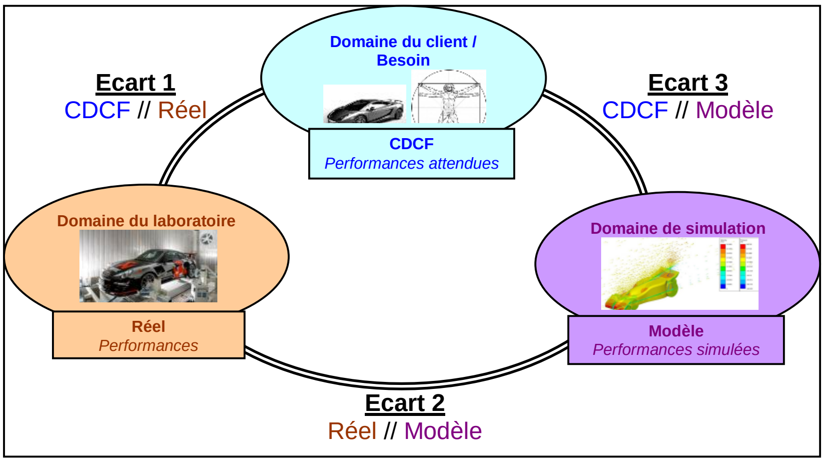
I.1. CARACTERISTIQUES D'UN VECTEUR 10
I.2. BASE 10
I.3. COMPOSANTES D'UN VECTEUR 10
I.4. OPERATION SUR LES VECTEURS 11
I.4.1. Somme vectorielle 11
I.1.1. Multiplication d'un vecteur par un scalaire 11
I.4.2. Produit scalaire 11
I.4.3. Produit vectoriel 11
I.5. MOMENT VECTORIEL D'UN VECTEUR EN UN POINT 13

II. TORSEUR 14

II.1. DEFINITION 14
II.2. CHANGEMENT DE POINT OU DE REDUCTION D'UN TORSEUR (« TRANSPORT D'UN TORSEUR ») 14
II.3. OPERATIONS SUR LES TORSEURS 15

I. modélisation

L'objectif de l'ingénieur est de comprendre, analyser, améliorer ou valider un mécanisme réel. Pour cela, il faut d'abord le modéliser afin de pouvoir lui appliquer ensuite les lois de la mécanique du solide.

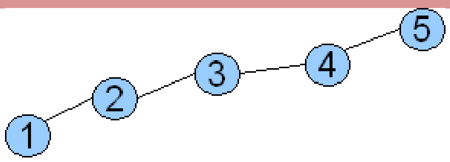
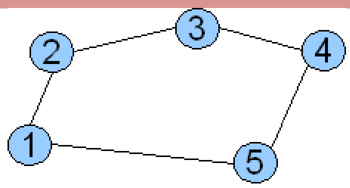
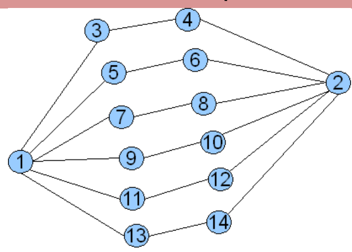


Le choix du modèle dépend :
de l'étude que l'on cherche à mener
du degré de précision demandée pour cette étude
des moyens de calculs disponibles pour cette étude
Le domaine de validité des lois de la mécanique implique la **mise en place d'hypothèses simplificatrices lors de la phase de modélisation.**

II. Structure des mécanismes et chaînes de solides

La **structure des mécanismes** peut-être représentée par le **graphe des liaisons,** graphe où les classes d'équivalence sont représentées par des cercles et les liaisons par des arcs (ou des segments) joignant les cercles.
Suivant la représentation obtenue, on pourra distinguer :

- des **chaînes ouvertes continues de solides,**
- des **chaînes fermées simples de solides,**
- des **chaînes fermées complexes de solides**.

Chaine continue ouverte : Robot	Chaîne continue fermée	Chaîne complexe
  Exemple: Robot Ericc	  Exemple: bras de robot MAXPID	  Exemple : Plateforme Stewart

III. Liaisons cinématiquement équivalentes

III.1. Définition

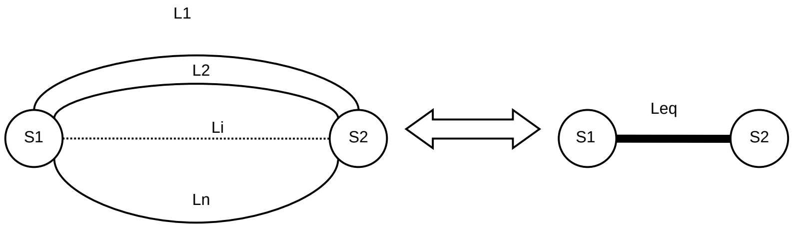
On appelle liaison cinématiquement équivalente entre deux pièces, la liaison qui se substituerait à l'ensemble des liaisons réalisées entre ces pièces avec ou sans pièce intermédiaire.
La liaison équivalente doit avoir **le même comportement cinématique que l'ensemble des liaisons auquel elle se substitu**e.
On distingue 2 cas :

- **les liaisons en parallèle,**
- **les liaisons en série.**

Pour déterminer une liaison équivalente, on peut rechercher soit le torseur statique équivalent, soit le torseur cinématique équivalent. On parle dans le **1er cas de méthode statique**, dans le **2ème de méthode cinématiqu**e.

III.2. Liaisons en parallèle

n liaisons (L1), (L2),…., (Li), …., (Ln) sont disposés en parallèles entre deux solides (S1) et (S2) si chaque liaison relie directement ces deux solides.



III.2.1. Détermination de la liaison équivalente à plusieurs liaisons en parallèle

Approche cinématique

L'ensemble des liaisons Li en parallèle impose le mouvement du solide 2 par rapport au solide 1, $\left\{V_{(S2/S1)}\right\}$ représente ce mouvement.

$\left\{V_{(S2/S1)}^{Li}\right\}$, le torseur cinématique de la liaison Li entre les deux solides S1 et S2.

Chaque liaison Li ne peut que respecter le mouvement global du solide 2 : $\left\{V_{(S2/S1)}^{Li}\right\} = \left\{V_{(S2/S1)}\right\}$

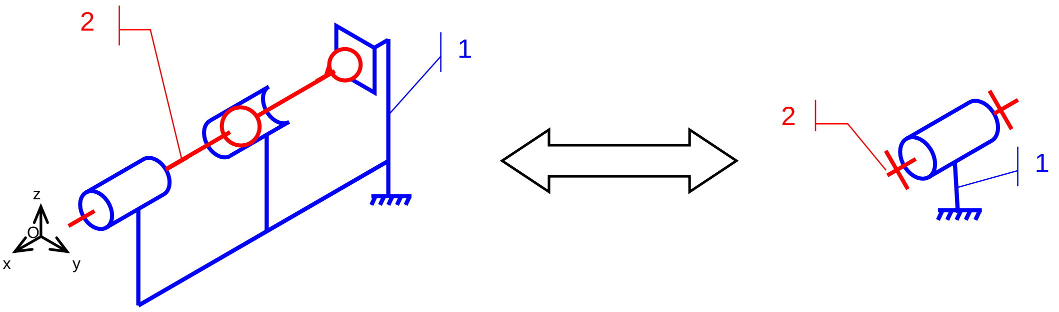
La liaison équivalente Leq doit aussi respecter le mouvement global du solide 2, d'où la condition que doit respecter le torseur cinématique de la liaison équivalente (en fonctionnement) : $\left\{V_{(S2/S1)}^{equ}\right\} = \left\{V_{(S2/S1)}^{Li}\right\}$.

Approche statique

Chaque éléments des torseurs statiques supprimant des mobilités se cumulent on aura donc : $\left\{T_{(S2\to S1)}^{equ}\right\} = \sum \left\{T_{(S2\to S1)}^{Li}\right\}$ en un même point.

Conclusion : Dans le cas des **liaisons en parallèle**, on privilégiera la **méthode statique**. Afin de simplifier les écritures, on aura intérêt à rechercher si les ensembles de points conservant pour chaque torseur sa forme particulière ont une intersection. On écrira alors les éléments de réduction des torseurs en un point de cette intersection.

Exemple

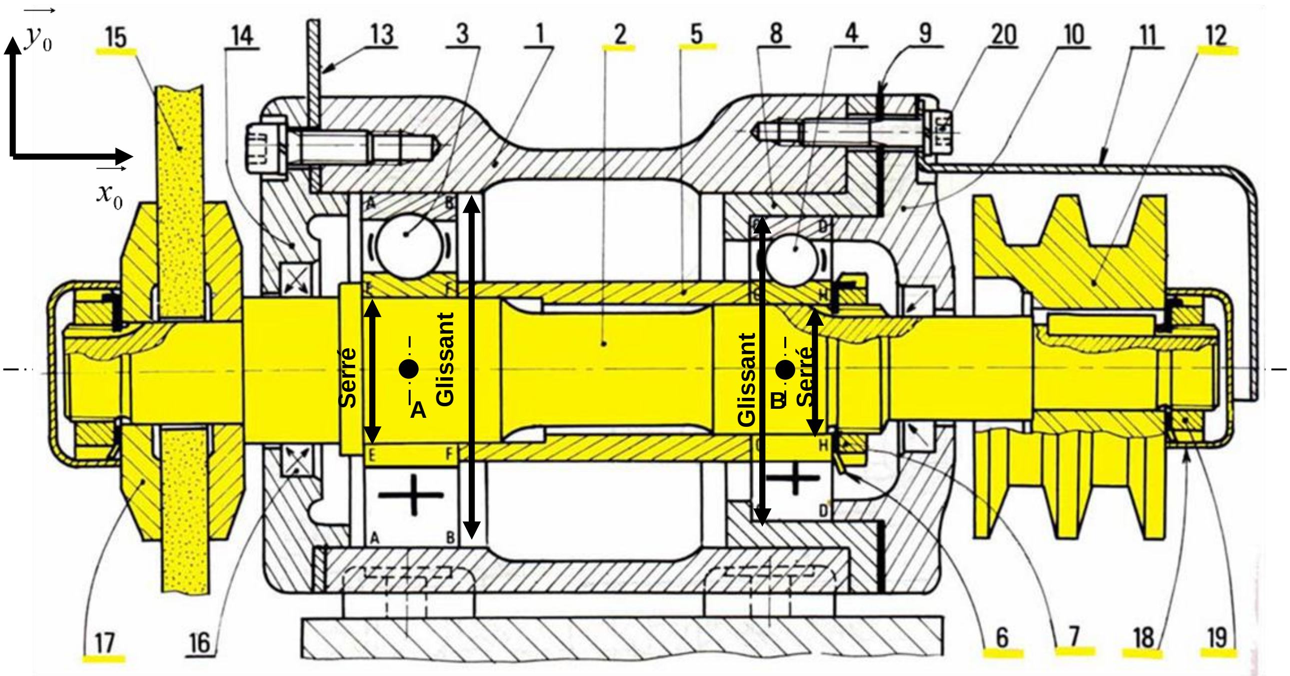


Application 1

Ci dessous le dessin d'ensemble d'un touret à meuler. L'arbre du touret est guidé en rotation par l'association de deux roulements. $\overrightarrow{AB} = a.\overrightarrow{x_0}$

A partir de la représentation partielle :

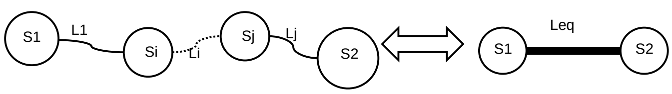
- Réaliser le graphe de liaison liant 0 et 1 en modélisant une liaison pour chaque roulement.
- Réaliser le schéma architectural.
- Déterminer par une approche statique la liaison équivalente entre 0 et 1. En déduire le schéma cinématique minimal.
- Quels peuvent être les avantages d'une telle solution technologique ?



Touret à meuler (source : http://ssi.stjo.free.fr/content/fichiers/rotation/Cours_roulement.pdf)

III.3. Liaisons en série

n liaisons (L1), (L2),…., (Li), …., (Ln) sont disposés en série entre deux solides (S1) et (S2) si elles ont disposées à la suite l'une de l'autre par l'intermédiaire de (n-1) solides.



III.3.1. Détermination de la liaison équivalente à plusieurs liaisons en série

Approche cinématique

En décomposant sur les solides intermédiaires on obtient :

$$\left\{V_{S_2/S_1}^{equ}\right\} = \left\{V_{S_2/S_j}\right\} + \cdots + \left\{V_{S_j/S_i}\right\} + \cdots + \left\{V_{S_i/S_1}\right\}$$

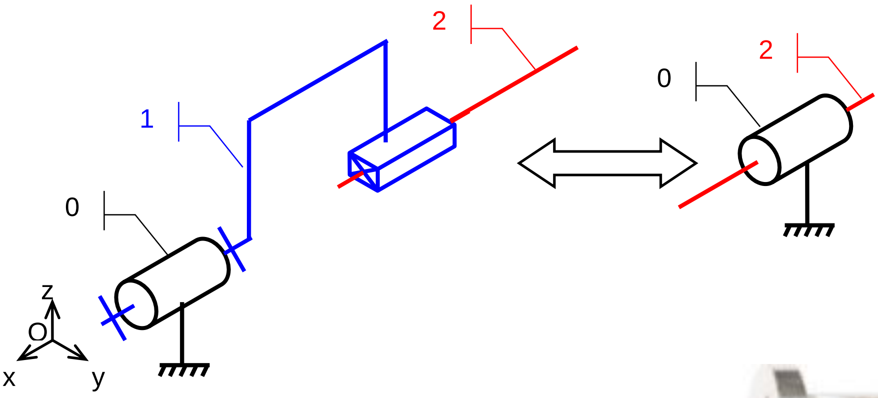
Approche statique

En appliquent le PFS au système de solides (1+2) on obtient :

$$\left\{T_{S_2/S_1}^{equ}\right\} = \left\{T_{S_i/S_1}^{L_1}\right\} = \left\{T_{S_j/S_i}^{L_i}\right\} = \left\{T_{S_2/S_j}^{L_j}\right\}$$

Conclusion : Dans le cas des **liaisons en série**, on privilégiera la **méthode cinématique**. Afin de simplifier les écritures, on aura intérêt à rechercher si les ensembles de points conservant pour chaque torseur sa forme particulière ont une intersection. On écrira alors les éléments de réduction des torseurs en un point de cette intersection.

Exemple

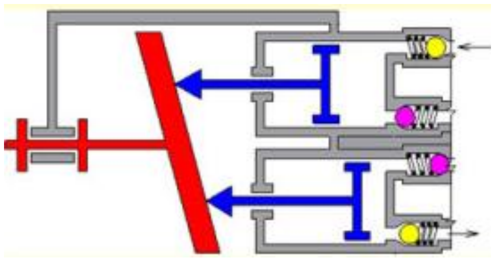


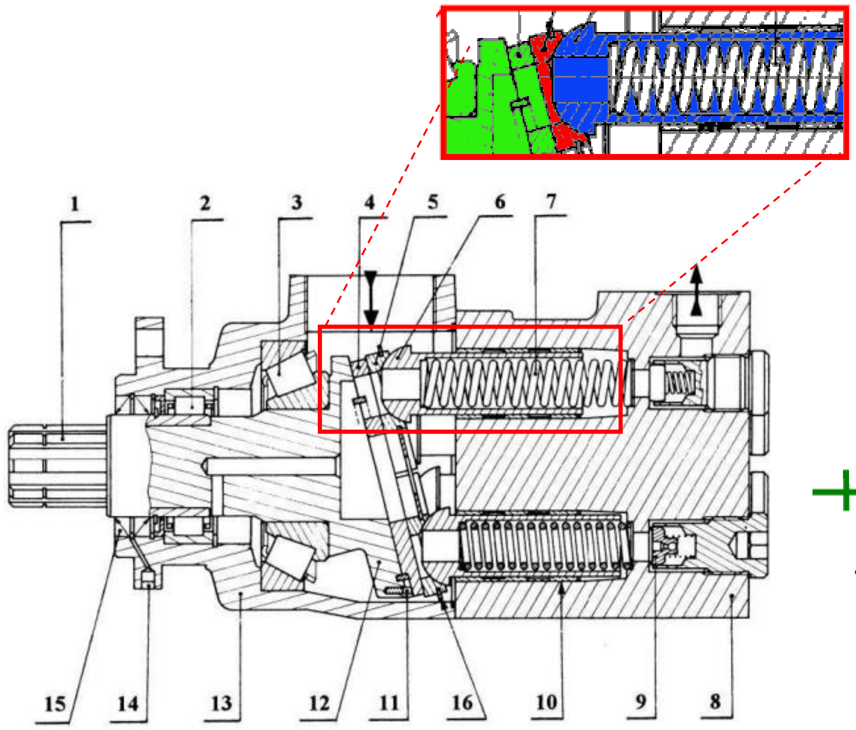
Application 2

Ci dessous le dessin d'une pompe hydraulique (Pompe Leduc) utilisée dans l'aéronautique (Hélicoptère). L'objectif est d'analyser la liaison entre le piston 6 et l'arbre 4.

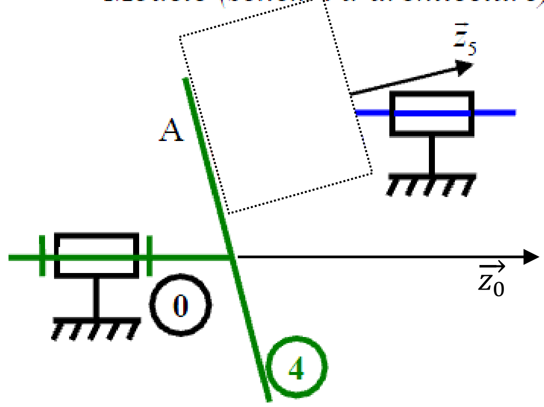
- Compléter le schéma cinématique
- Déterminer par une approche cinématique la liaison équivalente entre 4 et 6.

Quels peuvent être les avantages d'une telle solution technologique ?





Modèle (schéma d'architecture)



IV. Degrés de mobilité d'un mécanisme

On définit le degré de mobilité d'un mécanisme (m_c) comme étant, le nombre de mouvements indépendants possibles dans un mécanisme. Ce nombre correspond donc au nombre de paramètres cinématiques indépendants nécessaires pour définir toutes les inconnues cinématiques.

Le degré de mobilité $\mathbf{m_c}$, est la somme des mobilités utiles $\mathbf{m_u}$ et des mobilités internes $\mathbf{m_i}$.

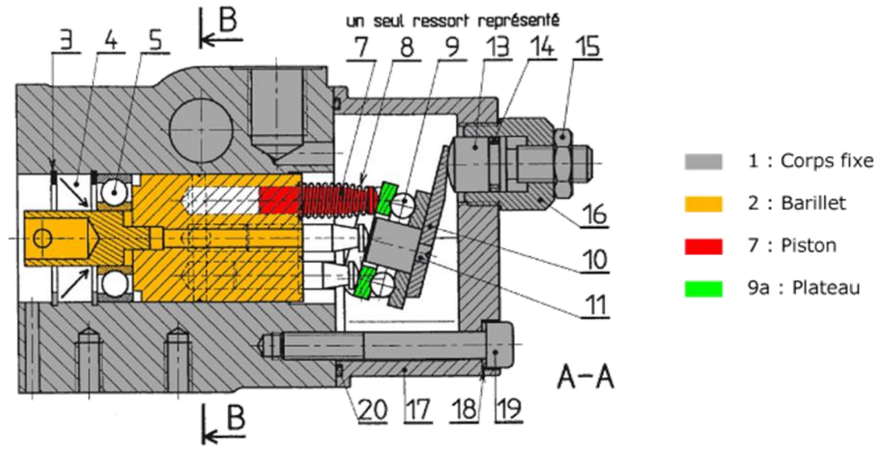
- **mobilité utile (m_u)**, représente **le nombre de mouvements indépendants faisant intervenir au moins un des paramètres d'entrée-sortie du mécanisme**.

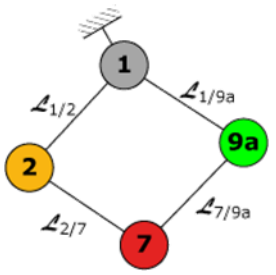
Pour trouver m_u, on peut imaginer bloquer les pièces d'entrée/sortie du mécanisme. La mobilité utile correspond alors au **nombre minimal de pièces qu'il a fallu bloquer pour figer les lois entrée-sortie**. Dans la plupart des cas les mobilités utiles sont liées à un actionneur (vérin, moteur,...).

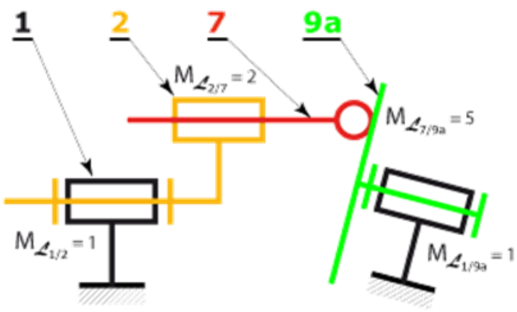
- **mobilité interne (mi)**, représente **le nombre de mouvements indépendants ne faisant des paramètres d'entrée-sortie**. Ces mobilités concernent des pièces internes au mécanisme qui ont la capacité de bouger sans entrainer les autres pièces.

Pour trouver mi , on peut imaginer **bloquer les mouvements d'entrée/sortie du mécanisme** et **compter ensuite les mouvements internes possibles** et non contrôlés de pièces qui ne participent pas au mouvement d'entrée-sortie.
Les bielles et les tiges de piston, selon la modélisation, peuvent présenter une mobilité interne (rotation sur elle-même).

Exemple pompe hydraulique de pilote de bateau:







Avec le modèle choisi:
m_u= 1

- rotation de la pièce 2

m_i=2

- rotation du piston sur lui même
- rotation du plateau

$m_c=m_u+m_i=3$

Remarque:
Les degrés de liberté caractérisent les mouvements dans les liaisons et les degrés de mobilité les mouvements des pièces dans les mécanismes.

V. Notion d'isostatisme - d'hyperstatisme

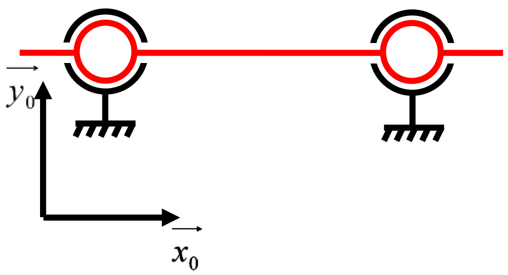
V.1. Définition

Le degré d'hyperstatisme (h) d'un mécanisme caractérise la surabondance des liaisons constituant le modèle du mécanisme. Un système est isostatique si h=0, un système est hyperstatique si h>0.

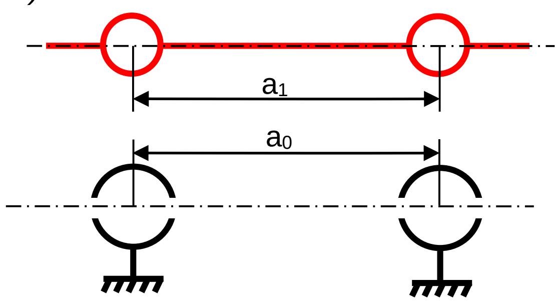
On peut également dire que:

- Un mécanisme est dit **isostatique** lorsque l'ensemble des liaisons mécaniques, entre pièces qui le constituent, **interdit de façon optimale (sans surabondance) certains degrés de liberté**, en vue d'obtenir le ou les mouvement(s) de sortie attendu(s).
- Un mécanisme est dit **hyperstatique** lorsque l'ensemble des liaisons mécaniques entre pièces qui le constituent **interdit de façon surabondante certains degrés de liberté**, en vue d'obtenir le ou les mouvements de sortie attendus (pour des questions de résistance, de précision, de pièces déformables notamment, pour permettre le fonctionnement dans certains cas de figure,…). L'assemblage d'un mécanisme hyperstatique suppose alors une précision d'usinage accrue des pièces qui le constituent.

Exemple: guidage en rotation d'un arbre (liaison pivot)

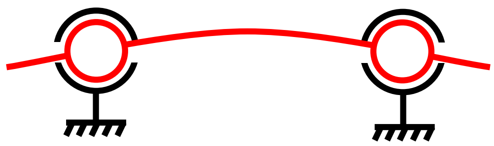


Le **degré d'hyperstatisme** de la modélisation est ici de **1** et est du à la **surabondance d'arrêt en translation** suivant l'axe x_0.



L'hyperstatisme engendre une **contrainte géométrique** de réalisation des pièces à respecter: **entraxe a_1=a_0**.

La modélisation choisie est ici **isostatique**, la réalisation des pièces ne présente **aucune contrainte**.



Condition géométrique non respectée

Remarques:

- Le nombre de contraintes géométriques à respecter est égale au degré d'hyperstatisme,
- l'hyperstatisme est **parfois bénéfique** lorsque les **efforts rentrant en jeu sont si importants** que l' isostatisme n'empêche pas les déformations. Un mécanisme hyperstatique, grâce à des liaisons intermédiaires peut **limiter les déformations**, **augmenter sa rigidité**. Toutefois, il n'est pas possible de se passer des conditions géométriques à imposer et cela **augmente le coût de fabrication**.

V.2. Calcul du degré d'hyperstatisme

Formule de mobilité permettant de calculer le degré d'hyperstatisme d'une modélisation en fonction du degré de mobilité m_c et de l'indice de mobilité m.

$$h = mc - m$$

Degré de mobilité

$m_c = m_u + m_i$

mu : mobilité utiles

mi :mobilité

Indice de mobilité

$m = \underline{Es-Ns} = \underline{Nc-Ec}$

Analyse statique

Es : Nombre d'équations scalaires obtenues par le principe fondamental de la statique.

Es=6(n-1)

n: nombre de classes d'équivalence du mécanisme

Ns : Somme des inconnues statiques de toutes les liaisons du modèle

Analyse cinématique

Ec : Nombre d'équations scalaires obtenues par fermeture cinématiques d'un modèle constitué de γ cycles indépendants.

Ec=6γ*

Nc : Somme des inconnues cinématiques de toutes les liaisons du modèle

***γ= nombre cyclomatique**
Ce nombre représente le nombre de chaînes fermées indépendantes du mécanisme il se calcul ainsi:
γ=nombre de liaison - nombre de classe d'équivalence +1

D'où :

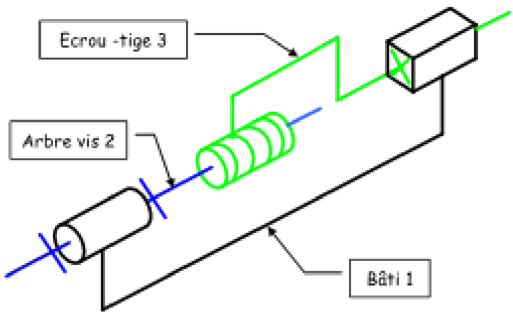
Approche statique :	$h = Ns - 6(n-1) + m_c$
Approche cinématique :	$h = 6.\gamma - Nc + m_c$

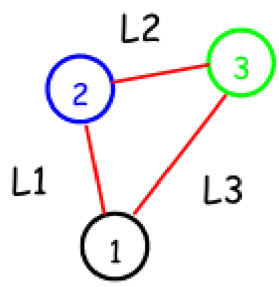
Application 3

Le fauteuil électrique ci-dessous est équipé de systèmes permettant différents réglages dont notamment le réglage de la hauteur de l'assise par l'intermédiaire d'un vérin électrique.

Vérin électrique

Afin d'implanter ce vérin correctement sur le fauteuil il faut connaître l'architecture du mécanisme. Ci-dessous la représentation et la schématisation du vérin électrique .



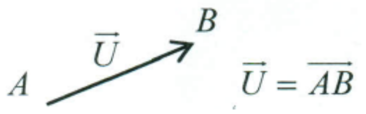


- Déterminer par une analyse le degré d'hyperstatisme du mécanisme.

ANNEXE - CALCUL VECTORIEL

I. VECTEUR

I.1. Caractéristiques d'un vecteur



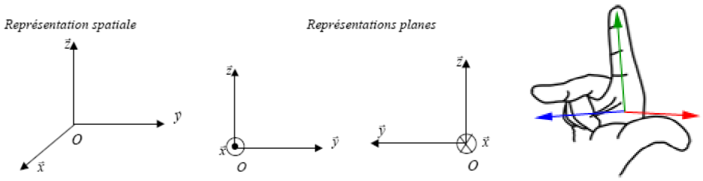
Un vecteur est un segment de droite orienté $\overrightarrow{AB}$
Il est caractérisé par :

- son origine ou point d'application A,
- sa direction : droite ou support à laquelle appartient le segment AB,
- son sens : celui du mouvement d'un mobile allant de A vers B,
- sa grandeur ou module : notée AB ou $\boxed{\left\| \overrightarrow{AB} \right\|}$.

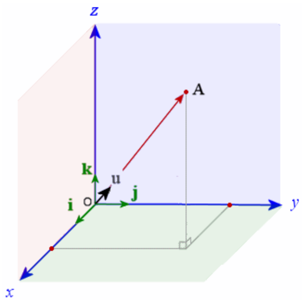
I.2. Base

Une base est un ensemble de 3 vecteurs linéairement indépendants $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ tel que $(\vec{z})$ ne puissent s'écrire que $(\vec{z} = a.\vec{x} + b.\vec{y})$.

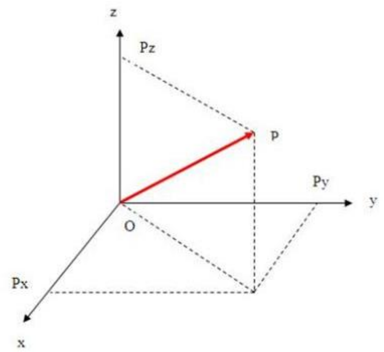
- Un repère est l'association d'un point d'origine et d'une base. Repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.
- Base et repère orthonormés $(\vec{x} \perp \vec{y} \perp \vec{z})$ avec $\left\|\vec{x}\right\| = \left\|\vec{y}\right\| = \left\|\vec{z}\right\| = 1$
- Base et repère orthonormés directs : Base et repère orthonormés dont les axes forment un trièdre direct (règle des 3 doigts de la main droite)



Remarque: On associe parfois à la base orthogonale directe $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ les vecteurs unitaires $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.



I.3. Composantes d'un vecteur



Soit, un repère orthonormé direct : R $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$
Le vecteur se note :

$\overrightarrow{OP} = P_x.\vec{x} + P_y.\vec{y} + P_z.\vec{z}$, P_x, P_y et P_z sont les composantes du vecteur

Et $\boxed{\left\| \overrightarrow{OP} \right\| = \sqrt{P_x^2 + P_y^{\,2} + P_z^{\,2}}}$

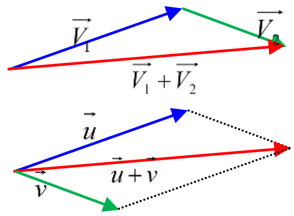
Soit :

- un repère orthonormé direct : R$(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$
- coordonnées du point A : (x_a, y_a, z_a)
- coordonnées du point B : (x_b, y_b, z_b)

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est définit par ses composantes : $\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_b - x_a \\ y_b - y_a \\ z_b - z_a \end{pmatrix}}$

I.4. Opération sur les vecteurs

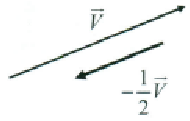
I.4.1. Somme vectorielle



Si $\vec{V_1} = x_1.\vec{x} + y_1.\vec{y} + z_1.\vec{z}$ et $\vec{V_2} = x_2.\vec{x} + y_2.\vec{y} + z_2.\vec{z}$

alors $\boxed{\vec{V_1} + \vec{V}_2 = (x_1 + x_2).\vec{x} + (y_1 + y_2).\vec{y} + (z_1 + z_2).\vec{z}}$

I.1.1. Multiplication d'un vecteur par un **scalaire**



Si $\vec{V} = x.\vec{x} + y.\vec{y} + z.\vec{z}$ alors $\boxed{\lambda.\vec{V} = \lambda.x.\vec{x} + \lambda.y.\vec{y} + \lambda.z.\vec{z}}$

Les vecteurs $\vec{V}$ et $\lambda.\vec{V}$ sont des vecteurs colinéaires.

I.4.2. Produit scalaire

Opération qui associe à deux vecteurs un scalaire et est noté $\vec{V_1}.\vec{V}_2$.

Le produit scalaire de deux vecteurs est un scalaire

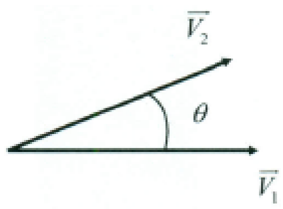
Calcul par les composantes

Soient $\vec{V_1} = x_1.\vec{x} + y_1.\vec{y} + z_1.\vec{z}$ et $\vec{V_2} = x_2.\vec{x} + y_2.\vec{y} + z_2.\vec{z}$

Alors $\boxed{\vec{V_1}.\vec{V}_2 = x_1.x_2 + y_1.y_2 + z_1.z_2}$

Calcul par le module et l'angle entre les deux vecteurs

$$\boxed{\vec{V_1}.\vec{V}_2 = \left\|\vec{V_1}\right\|.\left\|\vec{V_2}\right\|.\cos\theta}$$



Remarque :

- Si : $\theta = 0$ alors $\boxed{\vec{V_1}.\vec{V}_2 = V_1.V_2}$
- Si : $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ alors $\boxed{\vec{V_1}.\vec{V}_2 = 0}$

I.4.3. Produit vectoriel

Opération qui associe à deux vecteurs un troisième vecteur.

Le produit vectoriel de deux vecteurs est un vecteur

$(\vec{U},\vec{V}) \rightarrow \vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V}$ tel que :

- $\vec{W}$ est perpendiculaire au plan formé par $\vec{U}$ et $\vec{V}$
- $(\vec{U},\vec{V},\vec{W})$ forment un trièdre direct
- $\left\|\vec{W}\right\| = \left\|\vec{U}\right\|.\left\|\vec{V}\right\|.\sin\alpha$ avec α angle entre $\vec{U}$ et $\vec{V}$

Cette opération est **anticommutative** et **distributive** par rapport à l'addition.

Soient $\vec{V}_1 = x_1.\vec{x} + y_1.\vec{y} + z_1.\vec{z}$ et $\vec{V}_2 = x_2.\vec{x} + y_2.\vec{y} + z_2.\vec{z}$

Calcul par les composantes

Alors $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{W} = \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{vmatrix}$ avec $\boxed{\begin{aligned} w_1 &= y_1.z_2 - z_1.y_2 \\ w_2 &= z_1.x_2 - x_1.z_2 \\ w_3 &= x_1.y_2 - y_1.x_2 \end{aligned}}$

Calcul par la distributivité

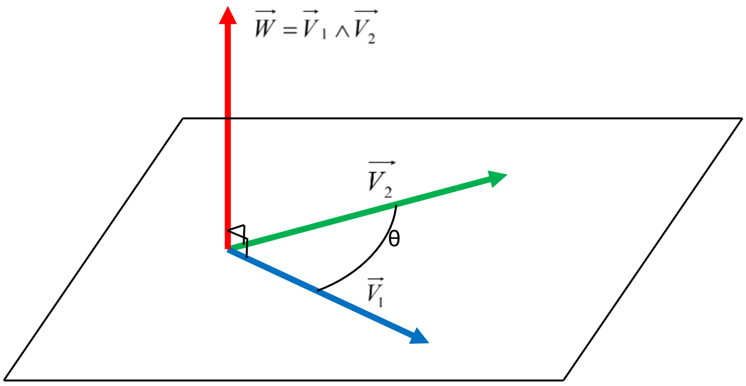
$$\vec{W} = (x_1.\vec{x} + y_1.\vec{y} + z_1.\vec{z}) \wedge (x_2.\vec{x} + y_2.\vec{y} + z_2.\vec{z})$$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{W} = {} & x_1.x_2.\underbrace{(\vec{x} \wedge \vec{x})}_{=\vec{0}} + x_1.y_2.\underbrace{(\vec{x} \wedge \vec{y})}_{=\vec{z}} + x_1.z_2.\underbrace{(\vec{x} \wedge \vec{z})}_{=-\vec{y}} \\ & + y_1.x_2.\underbrace{(\vec{y} \wedge \vec{x})}_{=-\vec{z}} + y_1.y_2.\underbrace{(\vec{y} \wedge \vec{y})}_{=\vec{0}} + y_1.z_2.\underbrace{(\vec{y} \wedge \vec{z})}_{=\vec{x}} \\ & + z_1.x_2.\underbrace{(\vec{z} \wedge \vec{x})}_{=\vec{y}} + z_1.y_2.\underbrace{(\vec{z} \wedge \vec{y})}_{=-\vec{x}} + z_1.z_2.\underbrace{(\vec{z} \wedge \vec{z})}_{=\vec{0}} \end{aligned}}$$

$$\boxed{\vec{W} = x_1.y_2.\vec{z} - x_1.z_2.\vec{y} - y_1.x_2.\vec{z} + y_1.z_2.\vec{x} + z_1.x_2.\vec{y} - z_1.y_2.\vec{x}}$$

Calcul par le module et l'angle entre les deux vecteurs

$$\|\vec{W}\| = \|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\| = \|\vec{V}_1\|.\|\vec{V}_2\|.\sin\theta$$



Propriétés :

- Le produit vectoriel est anticommutatif

  $\boxed{\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = -(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1)}$

- Associativité par rapport à la multiplication par un scalaire

  $\boxed{\lambda.(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) = \lambda.\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{V}_1 \wedge \lambda.\vec{V}_2}$

- Distributivité

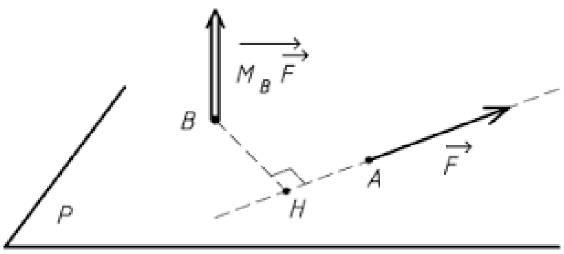
  $\boxed{\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_3}$

- Cas particulier
  - Si : $\theta = \frac{\pi}{2}$ alors $\boxed{\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{V}_3}$ avec $\boxed{\vec{V}_3 \perp \vec{V}_1}$ et $\boxed{\vec{V}_3 \perp \vec{V}_2}$
  - Si : $\theta = 0$ alors $\boxed{\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = 0}$

I.5. Moment vectoriel d'un vecteur en un point

Soient :

- A un point appartenant au support de $\vec{F}$
- B un point quelconque de l'espace



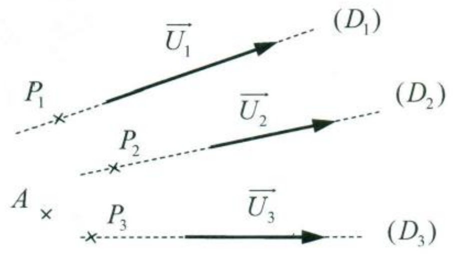
Par définition le moment vectoriel de $\vec{F}$ au point B est :

$$\boxed{\vec{M_B(\vec{F})} = \vec{BA} \wedge \vec{F}}$$

II. TORSEUR

II.1. Définition

Le torseur est le représentant d'un ensemble de vecteurs glissants $\{\vec{U}i,(Di)\}$, il est défini par ses deux éléments de réduction :



- $\vec{R}$: la résultante du torseur $\vec{R}=\sum_{i=1}^{n}\vec{U}_i$
- $\overrightarrow{M_A}$:le moment au point A du torseur $\overrightarrow{M}_A=\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{AP_i}\wedge\vec{U}_i$

On note : $\{T\}=_A\begin{Bmatrix}\vec{R}\\ \overrightarrow{M}_A\end{Bmatrix}$ ou $\{T\}=_A\{\vec{R},\overrightarrow{M}_A\}$

Ce torseur comporte 6 composantes : $\{T\}=_A\begin{Bmatrix}R_x & M_{A_x}\\ R_y & M_{A_y}\\ R_z & M_{A_z}\end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

Remarque :

- La résultante $\boxed{\vec{R}}$ du torseur est indépendante du point où est défini le torseur.
- Le moment $\boxed{\overrightarrow{M}}$ dépend du point où il est exprimé.

II.2. Changement de point ou de réduction d'un torseur (« transport d'un torseur »)

Pour déplacer au point B un torseur exprimé en un point A, il faut :

- Conserver la résultante $\vec{R}$
- Déplacer le moment en utilisant la relation du champ des moments :

$$\boxed{\overrightarrow{M}_B=\overrightarrow{M}_A+\overrightarrow{BA}\wedge\vec{R}\ \text{(« BABAR »)}}$$

$$\boxed{\{T\}=_B\begin{Bmatrix}\vec{R}\\ \overrightarrow{M}_B=\overrightarrow{M}_A+\overrightarrow{BA}\wedge\vec{R}\end{Bmatrix}_R}$$

CC BY NC SA

II.3. Opérations sur les torseurs

Egalité de deux torseurs

Deux torseurs sont égaux s'ils ont mêmes éléments de réductions en un point, réciproquement s'ils ont mêmes éléments de réduction en un point, ils sont égaux.

$$\{T_1\}_A = \{T_2\}_A = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R}[T_1] = \vec{R}[T_2] \\ \overrightarrow{M}_{A[T_1]} = \overrightarrow{M}_{A[T_2]} \end{Bmatrix}_R$$

Somme de torseurs

Soit deux torseurs dont les éléments de réductions en un point sont connus alors:

$$\{T_1\}_A = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R}[T_1] \\ \overrightarrow{M}_{A[T_1]} \end{Bmatrix}_R \quad \{T_2\}_A = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R}[T_2] \\ \overrightarrow{M}_{A[T_2]} \end{Bmatrix}_R \quad \text{alors} \quad \boxed{\{T_1 + T_2\}_A = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R}[T_1] + \vec{R}[T_2] \\ \overrightarrow{M}_{A[T_1]} + \overrightarrow{M}_{A[T_2]} \end{Bmatrix}_R}$$

Multiplication par un scalaire

Soient, $\{T\}_A = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R}[T] \\ \overrightarrow{M}_{A[T]} \end{Bmatrix}_R$ et λ un réel Alors $\boxed{\lambda.\{T\}_A = {}_A\begin{Bmatrix} \lambda.\vec{R}[T] \\ \lambda.\overrightarrow{M}_{A[T]} \end{Bmatrix}_R}$

Comoment de deux torseurs

On appelle **comoment** le scalaire défini par :

$$\boxed{\{T_1\}_A \otimes \{T_2\}_A = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R}[T_1] \\ \overrightarrow{M}_{A[T_1]} \end{Bmatrix}_R \otimes {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R}[T_2] \\ \overrightarrow{M}_{A[T_2]} \end{Bmatrix}_R = \vec{R}[T_1].\overrightarrow{M}_{A[T_2]} + \overrightarrow{M}_{A[T_1]}.\vec{R}[T_2]}$$

Ce scalaire est un invariant, il est indépendant du point ou l'on prend les éléments de réduction des torseurs.