SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGENIEUR

DC10 : Analyser et résoudre les problèmes énergétiques dans les mécanismes

Energétique

Objectifs	• Déterminer les lois de mouvements à partir du théorème de l'énergie-puissance

Savoirs
Je connais:

- Loi de mouvement
- Energie cinétique
- Actions mécaniques

Savoir Faire
Je sais faire:

- Exprimer l'énergie cinétique d'un solide dans un référentiel Galiléen.
- Exprimer les puissances extérieures et les inter-efforts.
- Appliquer le théorème de l'énergie puissance.
- Exprimer la loi de mouvement sous forme d'équation différentielle dans le cas où les efforts extérieurs sont connus.

Sommaire

***Le théorème de l'énergie cinétique (TEC)** appliqué à un solide (ou un ensemble de solides) permet d'obtenir une **relation scalaire entre les paramètres cinématiques du mouvement, les caractéristiques d'inertie du solide (ou de l'ensemble de solides) et les actions mécaniques appliquées sur le solide** (ou les solides). **Le TEC peut-être utilisé seul** ou avec le PFD. Dans certains cas, le TEC seul peut permettre de déterminer beaucoup plus rapidement les relations d'entrée-sortie entre les efforts (ou lois de mouvement) d'un système que le PFD. Dans d'autre cas le PFD restera plus efficace.*

I. Energie cinétique (rappel - voir cours cinétique)

I.1. Energie cinétique d'un solide (S)

Soit un solide (S) de masse m, de centre d'inertie G, en mouvement par rapport à un repère $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.
Soit un point A lié au solide (S).
Par définition, **l'énergie cinétique (en Joules)** du solide (S) dans son mouvement par rapport à R est :

$$T(S/R) = Ec(S/R) = \frac{1}{2}\int_{M\in S} \overrightarrow{V_{(M,S/R)}}^2 .dm$$

On peut exprimer plus simplement l'énergie cinétique à partir des torseurs cinétique et cinématique :

$2Ec(S/R) = \{C_{(S/R)}\} \otimes \{V_{(S/R)}\}$ **comoment des torseurs cinétique et cinématique.**

$$2Ec(S/R) = \begin{Bmatrix} m.\overrightarrow{V_{(G,S/R)}} \\ \overrightarrow{\sigma_{(A,S/R)}} \end{Bmatrix} \otimes \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \\ \overrightarrow{V_{(A,S/R)}} \end{Bmatrix}$$ **, soit :** $$2Ec(S/R) = m.\overrightarrow{V_{(G,S/R)}}.\overrightarrow{V_{(A,S/R)}} + \overrightarrow{\sigma_{(A,S/R)}}.\overrightarrow{\Omega_{S/R}}$$

L'énergie cinétique d'un solide est **indépendante du point A choisi pour la calculer**, on se placera donc dans un cas particulier.

Cas particuliers

A fixe dans R $2Ec(S/R) = \overrightarrow{\Omega_{S/R}}.[I_{A(S/R)}]\overrightarrow{\Omega_{S/R}}$

A=G $2Ec(S/R) = m.\overrightarrow{V_{(G,S/R)}}^2 + \overrightarrow{\Omega_{S/R}}.[I_{G(S/R)}]\overrightarrow{\Omega_{S/R}}$

S est en translation dans R $2Ec(S/R) = m.\overrightarrow{V_{(G/R)}}^2$

S est en rotation autour d'un axe fixe $(O,\vec{z})$ **avec** $\overrightarrow{\Omega_{S/R}} = \dot{\theta}.\vec{z}$ **:** $2Ec(S/R) = I_{Oz}.\dot{\theta}^2$

I.2. Energie cinétique pour un ensemble de solides

Pour un ensemble de solides : $Ec(S/R) = \sum_{i=1}^{n} T(S_i/R)$

II. PUISSANCE

Les notions de puissance, de travail et d'énergie jouent un rôle très important en mécanique.
Une fois ces notions rappelées nous pourrons par exemple :

- déterminer la puissance minimale du moteur d'entraînement d'un mécanisme pour assurer un mouvement,
- calculer le rendement d'un système,
- exprimer la conservation de l'énergie mécanique d'un réducteur ou d'un variateur pour obtenir le couple récepteur.

II.1. Puissance d'une action mécanique extérieure à un ensemble matériel

Soit un ensemble matériel E, en mouvement par rapport à un repère R. L'ensemble matériel E est soumis à une action mécanique représentée par une densité de force $\vec{f}(M)$ (champ de force) relativement à la mesure de masse dm en chaque point M de (E).

La puissance développée à un instant t par l'action mécanique représenté par la densité de force $\vec{f}(M)$, relativement à la mesure de l'élément de masse dm, dans le mouvement de (E) par rapport au repère R est :

$$P(\vec{f}(M) \to E/R) = \int_{M \in E} \vec{f}(M).\overrightarrow{V_{(M/R)}}.dm$$ **La puissance s'exprime en Watt (W)**

II.2. Puissance d'une action mécanique extérieure à un solide ou ensemble de solides (S)

Lorsque l'ensemble matériel E est un solide S, le mouvement de S par rapport à R est caractérisé par son torseur cinématique $\{V(S/R)\}$, on montre que :

$$P(\bar{S} \to S/R) = \{T(\bar{S} \to S)\} \otimes \{V(S/R)\}$$

La puissance développée par les actions mécaniques extérieures à un solide S en mouvement par rapport à R, est égale au comoment des torseurs d'actions mécaniques extérieures à S et du torseur cinématique de S par rapport à R.

Remarques :

- *Le comoment de deux torseurs est indépendant **du point choisi** pour écrire les deux torseurs, on choisira judicieusement le point d'écriture **(commun aux deux torseurs)** pour simplifier les calculs.*
- *La notion de puissance n'a de sens que par rapport à un repère. Effectivement le mouvement intervient dans le calcul d'une puissance or un mouvement est toujours défini par rapport à un repère.*
- *Si* $P(\bar{S} \to S/R) > 0$ *l'action mécanique est dite « motrice ».*
- *Si* $P(\bar{S} \to S/R) < 0$ *l'action mécanique est dire « réceptrice ».*

Cas particuliers

- **Si le torseur d'actions mécaniques est un glisseur alors** $P(\bar{S} \to S/R) = \overrightarrow{R_{(\bar{S} \to S/R)}}.\overrightarrow{V_{(A \in S/R)}})$
- **Si le torseur d'actions mécaniques est un couple alors** $P(\bar{S} \to S/R) = \overrightarrow{C_{(\bar{S} \to S/R)}}.\overrightarrow{\Omega_{(S/R)}}$

II.3. Puissance des actions mécaniques intérieures à un ensemble de solides (E)

Soit un ensemble de solide (S) constitué des différents solides Si. La puissance des efforts intérieurs entre Si et Sj s'écrit :

$$P_{\text{int}} = P(Si \leftrightarrow Sj) = P(Si \rightarrow Sj/Si) = \{T(Si \rightarrow Sj)\} \otimes \{V(Sj/Si)\}$$

Remarques :

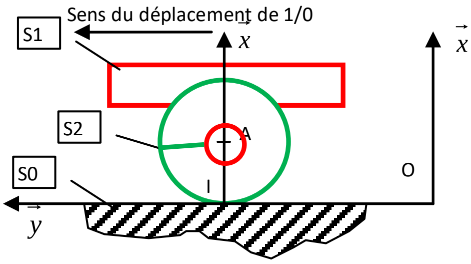
- *La puissance des efforts intérieurs, ne dépend pas du repère choisi pour la calculer.*
- *Dans le cas d'une liaison parfaite entre deux solides on a* $P_{\text{int}} = P(Si \leftrightarrow Sj) = 0$ *pour tout mouvement compatible avec la liaison.*

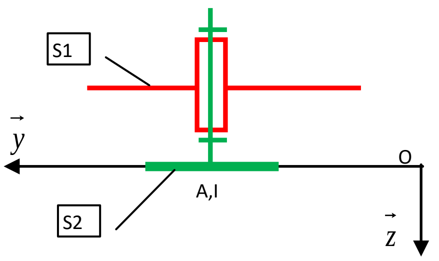
II.4. Exemple

Un véhicule à 4 roues se déplace en ligne droite sur une route. Calculons la puissance des différentes actions mécaniques exercées au niveau d'une roue arrière motrice (S2).

- Les liaisons sont parfaites et en I on a du roulement sans glissement entre S2 et S0.
- Le rayon de la roue est noté R.
- La vitesse de déplacement du véhicule $\overrightarrow{V_{A,S1/S0}} = V.\vec{y}$

1. Puissance de (S0) sur (S2), dans le mouvement de (S2) par rapport à (S0).
2. Puissance de (S0) sur (S2), dans le mouvement de (S2) par rapport à (S1).
3. Puissance de (S2) sur (S1), dans le mouvement de (S1) par rapport à (S0).
4. Puissance de (S2) sur (S1), dans le mouvement de (S1) par rapport à (S2).





II.5. Puissance comme produit de deux variables

La puissance est toujours le produit d'une variable flux par une variable potentielle:

Domaine	Variable potentielle	Variable flux	Puissance
Electrique	Tension U (V)	Courant I (A)	Pe = U.I
Mécanique en translation	Vitesse linéaire V (m/s)	Force F (N)	Pm = F.V
Mécanique en rotation	Vitesse de rotation Ω (rad/s)	Couple C (Nm)	Pm = C.Ω
Thermique	Température T (°K)	Flux thermique Φ	Pth = ΔT.Φ
Hydraulique	Pression P (Pa)	Débit Q (m^3/s)	Ph = ΔP.Q

III. TRAVAIL

Le travail entre les dates t1 et t2, d'une action mécanique sur un ensemble matériel est obtenue en faisant l'intégrale de la puissance développée par cette action mécanique entre ces deux instants.

$$W_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} P(t).dt$$ Le travail est exprimé en Joules (J).

III.1. Travail d'une force (glisseur)

On appelle travail de la force (glisseur) $(A,\vec{F})$ au cours de son déplacement élémentaire $\vec{dl}$ le produit scalaire :

$dW = \vec{F}.\vec{dl} = F.dl.\cos\alpha$ **ou α est l'angle entre les directions de la force (glisseur) et de son déplacement.**

III.1.1. Travail d'une force constante

$$W = \vec{F}.\vec{l} = F.l\cos\alpha$$

III.2. Travail d'un couple

$W = C.\theta$ **avec θ déplacement angulaire**

Remarque :

- 1 Joules correspond au travail d'une force de 1N se déplaçant de 1m dans la direction de son support.

IV. ENERGIE POTENTIELLE

Dans certains cas le travail ne dépend pas du chemin suivi, mais uniquement des valeurs finale et initiale d'une quantité appelée énergie potentielle. L'énergie potentielle est définie à une constante près.

- Energie potentielle de pesanteur **: EP=m.g.z**
- Energie potentielle d'un ressort (traction compression)d'axe $\vec{x}$ et de raideur k : **Ep=1/2.k.x²**
- Energie potentielle d'un ressort de torsion : **Ep=1/2.k.ϴ²**

V. THEOREME DE L'ENERGIE CINETIQUE

Ce théorème constitue une traduction énergétique du PFD.

I.1. Enoncé

I.1.1. Cas d'un solide (S)

La dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique galiléenne d'un solide (S) est égale à la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures à S :

$$\frac{d}{dt}Ec(S/R) = P(\overline{S} \to S/R)$$

I.1.2. Cas d'un ensemble de solides (E)

Dans le cas <u>d'un ensemble E</u> de solides, la dérivée par rapport au temps, de l'énergie cinétique galiléenne, est égale à la somme de la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures et de la puissance des actions mutuelles entre chaque solides.

$$\frac{d}{dt}Ec(E/R) = P(\overline{E} \to E/R) + \sum_{i,j=1}^{n} P_{(Si \leftrightarrow Sj)}$$

V.1. Intégrale première de l'énergie cinétique

La variation de l'énergie cinétique galiléenne d'un ensemble de solides (E) de solides, entre les dates t1 et t2, est égale à la somme des travaux des actions mécaniques extérieures à (E) et des travaux des actions mutuelles entre chaque solides.

$$\Delta Ec_{(E/R)} = E_{C2} - E_{C1} = W_{t1}^{t2}(\overline{E} \rightarrow E/R) + \sum_{i,j=1}^{n} W_{t1}^{t2}(Si \leftrightarrow Sj)$$

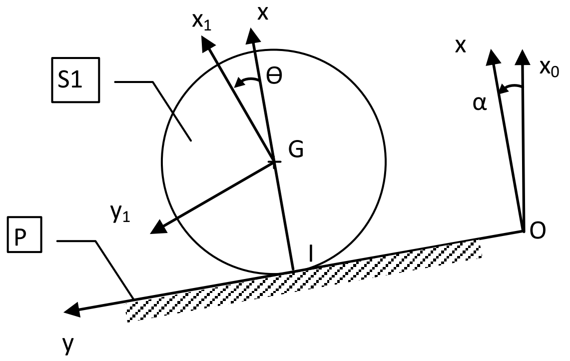
Remarques :

- Le théorème de l'énergie cinétique pour un ensemble de solides, fait intervenir **la puissance des actions mécaniques extérieures et intérieures**.
- Le théorème de l'énergie cinétique permet d'obtenir une équation différentielle du second ordre caractéristique du mouvement, cette équation n'est pas indépendante des 6 équations obtenues à partir du PFD**. L'équation obtenue est en général utilisée pour déterminer la loi d'entrée-sortie d'un mécanisme à une mobilité**.
- Le théorème est difficile à mettre en œuvre si les puissances intérieures ne sont pas nulles ou ne dérivent pas d'une fonction de force invariable (ressort).

V.2. Exemple

Considérons un cylindre de révolution (S1) roulant sans glisser sur un plan incliné (P) d'un angle α par rapport à l'horizontale, en supposant que l'axe du cylindre reste constamment orthogonal à la ligne de plus grande pente du plan, de façon à schématiser l'étude par un problème plan.

- Soit $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ un repère lié au plan (P).
- Soit (S1) cylindre homogène de masse m, de rayon R, et de centre d'inertie G, a pour axe de révolution $(G,\vec{z})$. (S1) est en contact avec le plan (P) en I et roule sans glisser sur ce plan.
- $R_1(O,\vec{x_1},\vec{y_1},\vec{z})$ un repère lié à (S1). On pose $\theta = (\vec{x},\vec{x_1})$.
- Soit $I_{GZ} = \dfrac{m.R^2}{2}$ le moment d'inertie de (S1) en G par rapport à l'axe $\vec{z}$.



On donne l'énergie cinétique $Ec(S1/R) = \dfrac{3}{4}.m.(R.\dot{\theta})^2$

1. A partir du théorème de l'énergie cinétique appliqué au solide (S1), déterminer $\ddot{\theta}$ et $\ddot{y}$ (accélération linéaire du solide S1).
2. Déterminer la distance parcourue au bout de 2s en négligeant les frottements de l'air et si α=20°.